

## ДЕКОДИРОВАНИЕ САМООРТОГОНАЛЬНЫХ КОДОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ MIN-SUM АЛГОРИТМА

Золотарёв В.В.<sup>1</sup>, Овечкин Г.В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт космических исследований

<sup>2</sup>Рязанский государственный радиотехнический университет

Помехоустойчивое кодирование широко используется для исправления ошибок, возникающих при передаче данных по каналам с шумами. В последнее время особое внимание зарубежными и отечественными специалистами уделяется классу кодов с малой плотностью проверок на четность (LDPC-кодам), предложенным Р.Галлагером [1]. Применение методов итеративного декодирования к данным кодам позволяет практически вплотную приблизиться к пропускной способности канала с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ) при относительно небольшой сложности реализации [2].

Для декодирования подобных кодов обычно используются алгоритмы [3], работающие с графом Таннера кода. В основе работы данных методов лежит итеративный обмен сообщениями между битовыми и проверочными узлами графа кода. Битовые узлы графа соответствуют кодовым символам, а проверочные – проверкам, которые можно составить для кодовых символов.

Сообщения, посылаемые  $i$ -м битовым узлом к  $j$ -му проверочному, определяются как сумма всех сообщений, поступивших от других проверочных узлов, и канального решения для кодового бита:

$$q_{i,j} = L_i + \sum_{k \in C_i, k \neq j} r_{k,i}.$$

Здесь  $q_{i,j}$  – сообщение от  $i$ -го битового к  $j$ -му проверочному узлу;  $L_i$  – мягкое решение демодулятора относительно всех канальных битов;  $C_i$  – множество номеров проверочных узлов, связанное с  $i$ -м битовым узлом;  $r_{k,i}$  – сообщение от  $k$ -го проверочного к  $i$ -му битовому узлу (эти сообщения на первой итерации декодирования инициализируются нулями).

Сообщения, посылаемые  $j$ -м проверочным узлом к  $i$ -му битовому, определяются как:

$$r_{j,i} = 2 \tanh^{-1} \left( \prod_{k \in R_j, k \neq i} \tanh \frac{q_{k,j}}{2} \right).$$

Здесь  $R_j$  – множество номеров битовых узлов, связанное с  $j$ -м проверочным узлом;  $\tanh(x)$  – гиперболический тангенс.

Процесс обмена сообщениями между битовыми и проверочными узлами повторяется многократно, несколько десятков или даже сотен раз. После этого результатом работы декодера будут мягкие решения, определяемые в соответствии с выражением

$$b_i = L_i + \sum_{k \in C_i} r_{k,i}.$$

Знак решений будет определять значение декодируемого бита, а модуль – надежность решения. Алгоритмы декодирования, реализующие подобный подход, называются message-passing (MP) декодерами.

Отметим, что формирование сообщений от битовых узлов к проверочным является достаточно простой задачей, поскольку для этого используется только операция сложения. Этого нельзя сказать о формировании сообщений от проверочных узлов к битовым, так как при этом используется достаточно сложная для вычисления функция определения гиперболического тангенса и обратная от нее, а также операция умножения. В ре-

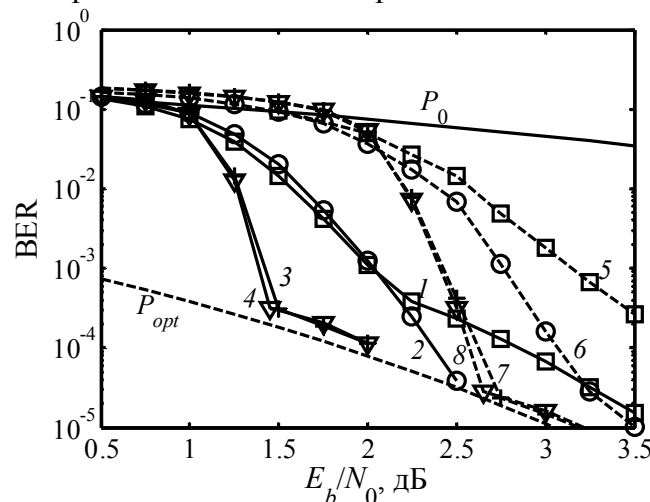
зультате вместо данного алгоритма на практике используются его модификации, имеющие существенно меньшую вычислительную сложность за счет незначительно худшей корректирующей способности. Одним из таких алгоритмов является min-sum алгоритм, в котором для вычисления сообщений от проверочных узлов к битовым используется выражение

$$r_{j,i} = \prod_{k \in R_j, k \neq i} \text{sign}(q_{k,j}) \cdot \min_{k \in R_j, k \neq i} (|q_{k,j}|).$$

В ряде публикаций показано, что проигрыш от применения подобного упрощения составляет порядка 0,5 дБ. Однако наряду с меньшей сложностью реализации данный алгоритм не чувствителен к неточности информации о состоянии канала. Это дополнительно существенно снижает сложность приемника.

Заметим, что min-sum алгоритм может подойти и для декодирования самоортогональных кодов (СОК), для декодирования которых обычно применяется многопороговый декодер (МПД) [4, 5, 6]. Проверочная матрица для данных кодов также является разреженной. Отметим, что по сравнению с существующими LDPC кодами при одинаковых параметрах СОК будут обладать существенно меньшей сложностью кодирования, что немаловажно для многих систем.

Представим результаты исследования эффективности min-sum алгоритма декодирования СОК, полученные путем компьютерного моделирования. Графики зависимости вероятности ошибки декодирования от отношения сигнал/шум в канале с АБГШ при двоичной фазовой модуляции для min-sum декодирования блоковых СОК с кодовым расстоянием  $d=9$  показаны на рис. 1. Кривая 1 соответствует коду с кодовой скоростью  $R=1/2$  и длиной  $n=1200$ , кривая 2 – коду с  $R=2/4$  (такая запись означает, что в данном коде присутствуют две информационных и две проверочные ветви) и  $n=1200$ , кривая 3 – коду с  $R=2/4$  и  $n=8000$ , кривая 4 – коду с  $R=4/8$  и  $n=10000$ . При получении данных графиков выполнялось не более 50 итераций декодирования. На этом же рисунке кривыми 5, 6, 7 и 8 показаны характеристики многопорогового декодирования данных кодов. Пунктирной кривой  $P_{opt}$  на рисунке показана эффективность оптимального декодера для используемых кодов. Отметим, что min-sum алгоритм оказывается лучше МПД для тех же кодов примерно на 1..0,5 дБ, а соотношение между эффективностью декодирования кодов с различной длиной сохраняется.



**Рис. 1. Результаты моделирования min-sum декодера СОК с  $d=9$ ,  $R=1/2$  и различной длиной**

При анализе длин циклов графов Таннера данных кодов, существенно влияющих на эффективность декодирования, оказывается, что код с  $R=1/2$  имеет 204 цикла длины 6, начинающихся в нулевом битовом узле, 4255 циклов длины 8, 139089 циклов длины 10.

Число циклов различной длины, начинающихся в нулевом символе, для остальных кодов представлено в таблице 1. Отметим, что более длинные коды с переменными связями, более устойчивые к размножению ошибок при многопороговом декодировании, имеют меньшее число коротких циклов, оказывающих наибольшее влияние на эффективность min-sum алгоритма декодирования. Поэтому использование кодов с переменными связями большей длины, как и в случае с МПД, позволяют существенно увеличить эффективность min-sum декодирования.

Таблица 1.

Число циклов различной длины для некоторых СОК с кодовым расстоянием 9

Код	Длина цикла			
	6	8	10	12
$R=1/2, d=9, n=1200$	204	4255	139089	1310707
$R=2/4, d=9, n=1200$	104	5318	135548	136798
$R=2/4, d=9, n=8000$	28	965	40273	904535
$R=4/8, d=9, n=10000$	0	815	36065	833902

Далее рассмотрим характеристики алгоритмов декодирования СОК с различным кодовым расстоянием, представленные на рис. 2. Здесь кривыми 1, 2, 3 и 4 показаны характеристики min-sum декодера, а кривыми 5, 6, 7 и 8 – характеристики многопорогового декодера для кодов с  $d=7, 9, 11$  и  $13$  соответственно. Отметим, что коды с большим кодовым расстоянием способны получить меньшую вероятность ошибки декодирования. Однако область, в которой min-sum декодер обеспечивает близкое к оптимальному декодированию, для кодов с меньшим кодовым расстоянием лежит ближе к пропускной способности канала. Это объясняется тем, что проверочные узлы для кодов с большим  $d$  имеют большую размерность, что несколько ухудшает качество сообщений, поступающих от них к битовым узлам. Также заметим, что преимущество min-sum алгоритма декодирования по сравнению с МПД снова оказывается порядка 0,5..1 дБ.

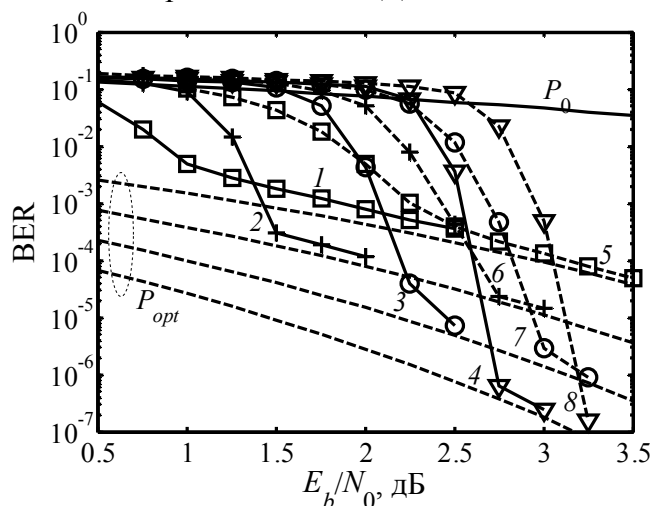
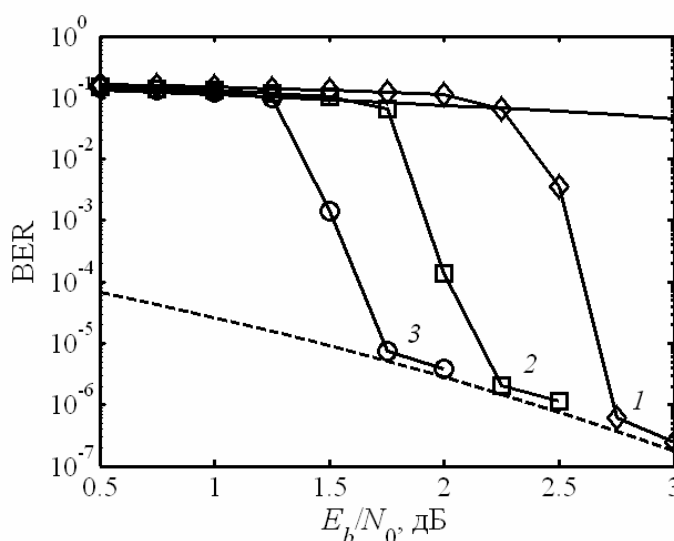


Рис. 2. Результаты моделирования min-sum декодера СОК с различным  $d$  и  $R=1/2$

Из представленных результатов можно сделать вывод о том, что min-sum декодер для различных СОК ведет себя так же, как и МПД. В результате можно предположить, что подходы к улучшению эффективности МПД [4, 5, 6], такие как использование кодов, наиболее устойчивых к размножению ошибок, применение параллельного кодирования, кодов с выделенными ветвями, каскадирование с простейшими внешними кодами и др., в дальнейшем позволят получить существенно больший энергетический выигрыш для min-sum алгоритма декодирования самоортогональных кодов.

Для примера на рис. 3 представлены результаты моделирования min-sum декодера для СОК с параллельным кодированием, в которых часть проверочных ветвей имеет небольшую размерность, а одна - большую. На данном рисунке кривой 1 показана эффективность декодирования обычного СОК с  $R=2/4$ ,  $d=13$ , ранее уже представленная на рис. 2. Кривая 2 отражает эффективность декодирования СОК с  $R=4/8$ ,  $d=13$  с параллельным кодированием. В данном коде были выбраны три проверочные ветви с размерностью 8 и одна с размерностью 24. В результате только за счет использования кода подобной структуры без увеличения сложности декодирования удалось приблизить область эффективной работы min-sum декодера к пропускной способности канала примерно на 0,5 дБ. Еще почти на 0,5 дБ лучшими характеристиками обладает декодер СОК с  $R=8/16$ ,  $d=13$  с параллельным кодированием (кривая 3). В данном коде семь проверочных ветвей имеют размерность 8, а одна – размерность 40. В заключение заметим, что использование кодов несколько более сложной структуры, вопросы выбора которой описаны в [7], позволит получить еще на несколько десятых дБ больший энергетический выигрыш кодирования.



**Рис. 3. Результаты моделирования min-sum декодера для СОК с параллельным кодированием**

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №08-07-00078).

### Литература

1. R.G. Gallager. Low-Density Parity-Check Codes. M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1963.
2. MacKay D. J. C., Neal R. M. Near Shannon limit performance of low density parity check codes // IEEE Electronics Letters. Aug. 1996. V. 32. №18. pp. 1645–1646.
3. Valenti M.C., Cheng S., Iyer Seshadri R. Turbo and LDPC codes for digital video broadcasting // Chapter 12 of Turbo Code Applications: A Journey from a Paper to Realization, Springer, 2005.
4. Золотарев В.В. Теория и алгоритмы многопорогового декодирования. М.: Радио и связь, Горячая линия – Телеком, 2006.
5. Зубарев Ю.Б., Золотарев В.В., Овечкин Г.В., Обзор методов помехоустойчивого кодирования с использованием многопороговых алгоритмов // Цифровая обработка сигналов, 2008, №1, С.2–11.
6. Веб-сайты [www.mtdbest.iki.rssi.ru](http://www.mtdbest.iki.rssi.ru) и [www.mtdbest.ru](http://www.mtdbest.ru).
7. Овечкин Г.В., Овечкин П.В. Оптимизация структуры не двоичных самоортогональных кодов для схем параллельного кодирования // Труды НИИР, 2009, №2, С.34–38.