

Метод декодирования каскадных помехоустойчивых кодов с применением многопороговых алгоритмов

Овечкин Г.В.

Введение

В настоящее время для обмена информацией широко используются различные системы цифровой связи. Подобные системы используют для передачи данных как проводные, так и беспроводные каналы связи, в которых под действием различного рода шумов передаваемая информация может исказиться. Поэтому в любой системе передачи цифровых данных применяются средства помехоустойчивого кодирования, позволяющие исправлять возникающие ошибки.

На сегодняшний день в теории кодирования известен ряд кодов и методов их декодирования, различающихся корректирующей способностью, сложностью реализации и рядом других параметров. В статье представлены результаты исследований, в рамках которых развиваются эффективные и простые для практической реализации методы декодирования помехоустойчивых кодов, называемые алгоритмами многопорогового декодирования (МПД) [1..4]. Алгоритм МПД, являющийся исключительно российской разработкой и построенный на принципиально новых, но весьма неожиданных для теории помехоустойчивого кодирования принципах, позволил решить практически все основные проблемы высококачественного декодирования цифровых данных.

Многопороговые декодеры

Для иллюстрации основных принципов работы МПД, используемого для декодирования блочных или сверточных самоортогональных кодов (СОК) [2, 3], рассмотрим схемы, реализующие операции кодирования и декодирования. Кодер для подобных кодов является простейшим устройством, состоящим только из регистров сдвига и сумматоров по модулю 2. Пример кодера для блочного СОК с кодовой скоростью $R=1/2$ показан на рис. 1. Достаточно простым является и сам МПД, пример схемы реализации которого для такого же кода показан на рис. 2. Отметим, что данный декодер состоит только из информационного, синдромного и разностного регистров, сумматоров по модулю 2 и пороговых элементов, которые суммируют свои входы и сравнивают полученную сумму с порогом. Более подробное описание МПД можно найти в [1..4].

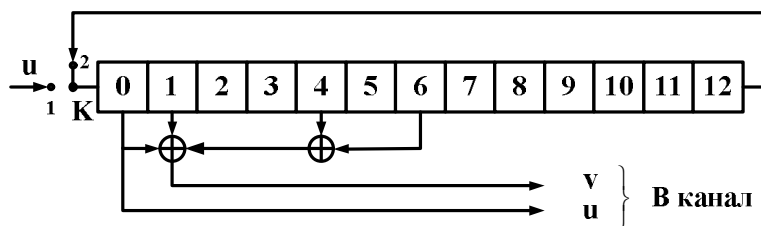


Рис. 1. Схема кодера блочного СОК

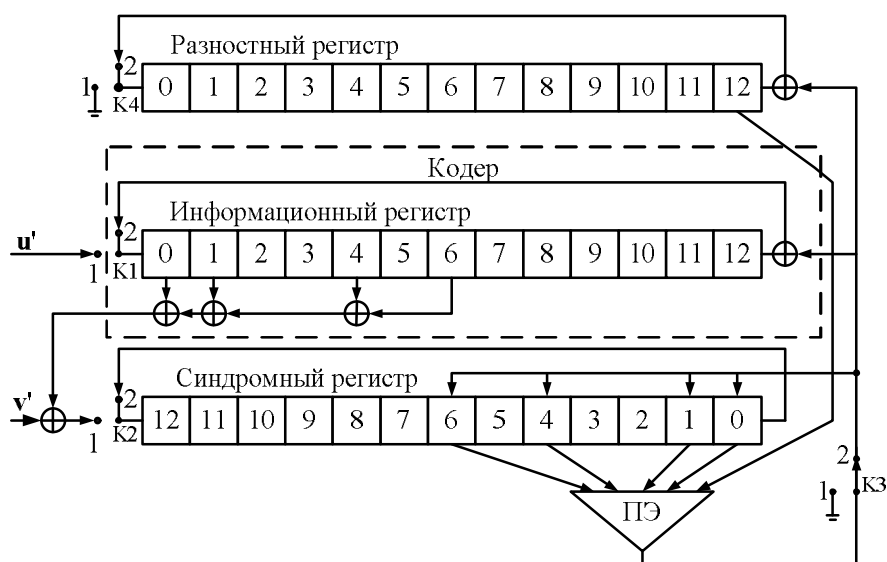


Рис. 2. Схема декодера МПД блочного кода с двумя итерациями

Для МПД показано, что они позволяют почти оптимально (т.е. так же хорошо, как и переборные экспоненциально сложные от длины кода методы!) декодировать даже очень длинные коды с линейной от длины кода сложностью исполнения, демонстрируя при этом достаточно хорошую корректирующую способность. При этом МПД, как следует из представленных схем кодирования/декодирования, выполняют только простейшие операции сложения и сравнения целых чисел, что делает их очень привлекательными для применения в существующих и вновь создаваемых высокоскоростных цифровых системах передачи данных.

Пример характеристик МПД в канале с АБГШ и модуляции типа BPSK при использовании кодов с кодовой скоростью $R=1/2$ и различным кодовым расстоянием d представлен на рис. 3. Кривая 1 на данном рисунке отражает характеристики кода с кодовой скоростью $R=2/4$, кодовым расстоянием $d=7$ и длиной $n=3600$, кривая 2 соответствует коду с $R=2/4$, $d=9$, $n=7600$, кривой 3 показана эффективность кода с $R=2/4$, $d=11$, $n=7500$, кривая 4 представляет характеристики МПД для кода с $R=2/4$, $d=13$, $n=13400$, и кривая 5 отражает характеристики МПД для длинного кода с $R=8/16$, $d=17$ и $n=60000$. Пунктирами P_{opt} на рисунке представлена вероятность ошибки декодирования кодов с разным кодовым расстоянием с помощью оптимального декодера. Заметим, что с помощью МПД оказывается возможным обеспечить близкое к оптимальному декодирование используемых СОК при достаточно высоком уровне шума в канале связи.

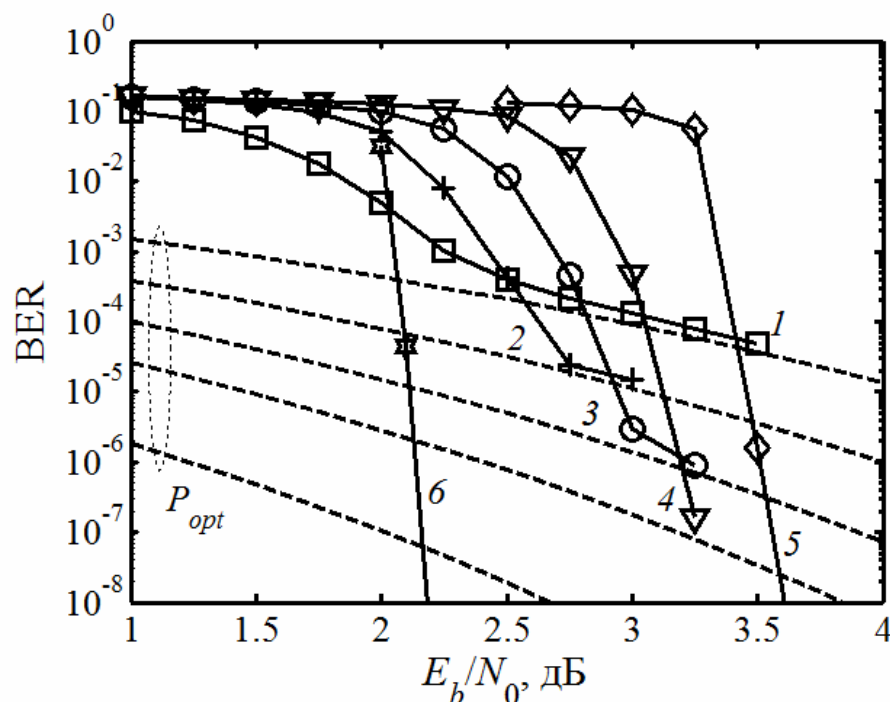


Рис. 3. Характеристики многопорогового декодера в канале с АБГШ для СОК с $R=1/2$ и различным кодовым расстоянием

Из представленных графиков следует, что чем больше кодовое расстояние используемого в МПД кода, тем меньшую вероятность ошибки декодирования можно получить. Однако характеристики МПД для кодов с меньшим кодовым расстоянием d сходятся оптимальным при меньшем отношении сигнал/шум. Это объясняется тем, что для кодов с большим кодовым расстоянием проверки имеют большую размерность, т.е. контролируют больше ошибок. В результате при одном уровне шума вероятность ошибочности проверки для кодов с большим d оказывается больше вероятности ошибочности проверки для кодов с меньшим d . Это приводит к тому, что последние коды способны обеспечить близкое к оптимальному декодирование при большем шуме в канале. Описанное свойство существенно затрудняет получение вероятностей ошибки декодирования порядка 10^{-5} и менее в области малых отношений сигнал/шум ($\leq 2,5$ дБ), поскольку, с одной стороны, для уменьшения вероятности ошибки декодирования следует использовать коды с большим кодовым расстоянием и обладающие, поэтому, большей корректирующей способностью. Но с другой стороны, при использовании кодов с большим кодовым расстоянием область эффективной работы МПД, в которой он начинает работать почти как оптимальный декодер, сдвигается в область меньших шумов.

Частично описанная проблема решается при помощи кодов с параллельным каскадированием и кодов с выделенными ветвями [3, 5]. Однако и при использовании данных кодов возникают перечисленные сложности. Другой подход к решению задач повышения эффективности МПД основан на использовании каскадных методов коррекции ошибок [6], которые, как известно из теории кодирования, позволяют уменьшить вероятность ошибки по сравнению с базовыми некаскадными методами.

В работах [7, 8, 9] рассмотрены разные каскадные схемы коррекции ошибок, использующие МПД как во внутреннем, так и внешнем каскаде кодовой конструкции. Данные схемы позволяют получить дополнительный энергетический выигрыш кодирования порядка 0,5 дБ при высоком уровне шума. Далее предлагается новый метод декодирования каскадного кода, состоящего из внутреннего СОК, декодируемого с помощью обычного МПД, и внешнего СОК, декодируемого с помощью взвешенного МПД.

Метод декодирования каскадного кода

Пусть внутренний СОК C_1 имеет кодовое расстояние d_1 , длину кода N_1 и длину информационной части K_1 , а внешний СОК C_2 имеет кодовое расстояние d_2 , длину кода N_2 и длину информационной части K_2 . С использованием данных кодов формируется код-произведение, т.е. информационное сообщение при кодировании сначала записывается в массив размером K_2 на K_1 , затем данные кодируются по столбцам внешним кодом C_2 , после чего результат кодируется по строкам внутренним кодом C_1 . В силу линейности составляющих кодов каждая строка полученной матрицы размером $N_2 \times N_1$ является кодовым словом внутреннего кода, а каждый столбец – кодовым словом внешнего кода. Общая длина кода получается равной $N_1 N_2$, длина информационной части $K_1 K_2$, минимальное кодовое расстояние $d_1 d_2$, кодовая скорость $R = K_1 K_2 / N_1 N_2$. После завершения процедуры кодирования данные из матрицы считываются по строкам и передаются по каналу.

Подобная организация каскадирования иллюстрируется рис. 4, на котором символы I соответствуют информационным символам кода, символы $C^{(2)}$ – проверочным символам внешнего кода. Проверочные символы внутреннего кода для информационных символов I обозначены через $C^{(1)}$, а проверочные символы внутреннего кода для проверочных символов внешнего кода обозначены на рис. 1 через $C^{(*)}$.

I	$C^{(1)}$
$C^{(2)}$	$C^{(*)}$

Рис. 4. Кодовое слово каскадного кода

Пусть после передачи по двоичному симметричному каналу декодер каскадного кода принял искаженные в канале информационные символы U и проверочные символы $V^{(1)}$, $V^{(2)}$ и $V^{(*)}$.

При декодировании принятого сообщения сначала обычный МПД выполняет декодирование внутреннего СОК (декодирование всех строк), после чего с помощью другого МПД, принципы работы которого будут сформулированы далее, выполняется декодирование внешнего СОК

(декодирование столбцов, соответствующих информационным символам каскадного кода).

Пусть после декодирования внутреннего СОК МПД сохранил значения синдромного и разностного регистров, записав их в массивы $\mathbf{S}^{(1)}$ и $\mathbf{D}^{(1)}$, а также сформировал массив \mathbf{L} , в который занес значение суммы на пороговом элементе для каждого из своих информационных символов [2]:

$$l_{ij} = \sum_{k \in \Theta_j} s_{ik}^{(1)} + d_{ij}^{(1)}, \quad (1)$$

где Θ_j представляет множество номеров проверок (элементов синдрома), участвующих при декодировании j -го символа внутреннего кода; $s_{ik}^{(1)}$ – элемент регистра $\mathbf{S}^{(1)}$; $d_{ij}^{(1)}$ – элемент регистра $\mathbf{D}^{(1)}$.

После этого в процесс декодирования включается МПД внешнего СОК, который в процессе работы сначала обычным образом вычисляет значение синдрома $\mathbf{S}^{(2)}$ и затем выполняет ряд итераций декодирования. При этом МПД внешнего кода принимает решение об изменении декодируемого символа u_{ij} в том случае, если сумма L_{ij} на пороговом элементе (ПЭ) будет больше нуля:

$$L_{ij} = (2d_{ij}^{(2)} - 1)\Delta_{ij} + \sum_{m \in \Omega_i} (2s_{mj}^{(2)} - 1)\Delta_{mj} > 0. \quad (2)$$

Отметим, что в данном выражении весовые коэффициенты Δ_{ij} отражают надежность поступающих на ПЭ символов и определяются с помощью МПД внутреннего кода; $s_{ik}^{(2)}$ – элемент массива $\mathbf{S}^{(2)}$; $d_{ij}^{(2)}$ – элемент массива $\mathbf{D}^{(2)}$ внешнего кода, изначально заполненного нулями; Ω_i – множество номеров проверок, участвующих при декодировании i -го символа внешнего кода. Далее МПД, принимающий решение об изменении декодируемого символа в соответствии с (2), будем называть взвешенным МПД.

Для описанного декодера каскадного кода справедлива теорема 1.

Теорема 1. Для канала типа ДСК при каждом изменении декодируемых символов на первой итерации взвешенного многопорогового декодера внешнего кода при весе символов внешнего кода $\Delta_{ij} = d_1 - 2l_{ij}$ происходит переход к более правдоподобному решению всего каскадного кода в целом по сравнению с предыдущим решением декодера.

Доказательство.

Пусть взвешенный МПД внешнего кода выполняет декодирование некоторого информационного символа u_{ij} . Сравним расстояние между принятым сообщением и кодовым словом полного каскадного кода до и после инвертирования символа u_{ij} . Под расстоянием между кодовым словом \mathbf{C} и принятым сообщением \mathbf{B} в случае использования канала типа ДСК понимается расстояние Хэмминга между ними:

$$W = \sum_{i=0}^{N-1} (c_i \oplus b_i), \quad (3)$$

где N – длина кодового слова; c_i – элемент вектора \mathbf{C} , равный 0 или 1; b_i – элемент вектора \mathbf{B} , равный 0 или 1.

Запишем выражение для расстояния между кодовым словом полного каскадного кода, являющегося решением декодера до изменения информационного символа u_{ij} , и принятым из канала сообщением. При этом в выражении для расстояния выделим элементы, связанные с декодируемым информационным символом и не связанные с ним. Заметим, что с информационным символом u_{ij} связаны:

- 1) d_1-1 проверка внутреннего кода.
- 2) d_2-1 проверка внешнего кода.
- 3) $(d_2-1)(d_1-1)$ проверок внешнего кода для проверочных символов внутреннего кода, связанных с рассматриваемым информационным символом.

- 4) Элемент разностного регистра $\mathbf{D}^{(1)}$.

Следовательно, с информационным символом u_{ij} связано всего d_2d_1-1 проверок и один элемент разностного регистра.

Тогда расстояние между кодовым словом полного каскадного кода до инвертирования символа u_{ij} и принятым сообщением определяется как:

$$\begin{aligned} W_0 &= X + d_{ij}^{(1)} + \sum_{k \in \Theta_j} s_{ik}^{(1)} + \\ &+ \sum_{m \in \Omega_i} \left[(1 - s_{mj}^{(2)})(d_{mj}^{(1)} + \sum_{k \in \Theta_j} s_{mk}^{(1)}) + s_{mj}^{(2)} \left[d_1 - (d_{mj}^{(1)} + \sum_{k \in \Theta_j} s_{mk}^{(1)}) \right] \right] = \\ &= X + l_{ij} + \sum_{m \in \Omega_i} \left[(1 - s_{mj}^{(2)})l_{mj} + s_{mj}^{(2)}(d_1 - l_{mj}) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

где X – константа, содержащая компоненты синдромов и разностного регистра, не зависящие от u_{ij} ; Ω_i – множество номеров проверок для внешнего кода, участвующих при декодировании i -го символа; Θ_j – множество номеров проверок внутреннего кода участвующих при декодировании j -го символа; $s_{ik}^{(1)}$ – элемент регистра $\mathbf{S}^{(1)}$; $s_{mj}^{(2)}$ – элемент регистра $\mathbf{S}^{(2)}$; $d_{ij}^{(1)}$ – элемент регистра $\mathbf{D}^{(1)}$; l_{mj} – элемент регистра \mathbf{L} ; d_1 – кодовое расстояние внутреннего СОК.

В сумме $\sum_{m \in \Omega_i} \left[(1 - s_{mj}^{(2)})(d_{mj}^{(1)} + \sum_{k \in \Theta_j} s_{mk}^{(1)}) + s_{mj}^{(2)} \left[d_1 - (d_{mj}^{(1)} + \sum_{k \in \Theta_j} s_{mk}^{(1)}) \right] \right]$ часть

$(1 - s_{mj}^{(2)})(d_{mj}^{(1)} + \sum_{k \in \Theta_j} s_{mk}^{(1)})$ соответствует проверочным символам внешнего кода,

для которых проверка $s_{mj}^{(2)}$ выполняется, а часть $s_{mj}^{(2)} \left[d_1 - (d_{mj} + \sum_{k \in \Theta_j} s_{mk}^{(1)}) \right]$ соответствует проверочным символам внешнего кода, для которых проверка не выполняется (соответствующий проверочный символ в кодовом слове должен быть инвертирован).

После инверсии символа u_{ij} все элементы, связанные с ним будут также инвертированы. Это приведет к тому, что расстояние между новым кодовым словом и принятым сообщением станет равным

$$W_1 = X + d_1 - l_{ij} + \sum_{m \in \Omega_i} [d_1 - (1 - s_{mj}^{(2)})l_{mj} - s_{mj}^{(2)}(d_1 - l_{mj})] \quad (5)$$

Определим условия, при выполнении которых данное расстояние при инвертировании символа u_{ij} уменьшается, т.е. выполняется условие

$$W_1 - W_0 < 0. \quad (6)$$

Имеем:

$$X + d_1 - l_{ij} + \sum_{m \in \Omega_i} [d_1 - (1 - s_{mj}^{(2)})l_{mj} - s_{mj}^{(2)}(d_1 - l_{mj})] - \left(X + l_{ij} + \sum_{m \in \Omega_i} [(1 - s_{mj}^{(2)})l_{mj} + s_{mj}^{(2)}(d_1 - l_{mj})] \right) < 0. \quad (7)$$

Упростив выражение и используя обозначение $\Delta_{ij} = d_1 - 2l_{ij}$ получаем

$$-\Delta_{ij} + \sum_{m \in \Omega_i} (2s_{mj}^{(2)} - 1)\Delta_{mj} > 0. \quad (8)$$

Следовательно, при инверсии символа u_{ij} расстояние между кодовым словом полного каскадного кода и принятым сообщением уменьшается, если выполняется условие (8). При этом происходит переход к более правдоподобному решению декодера. Но данное условие совпадает с условием принятия решения о наличии ошибки для первой итерации работы взвешенного МПД (выражение (2)). Таким образом, если взвешенный МПД внешнего кода на первой итерации изменяет некоторый информационный символ, то происходит переход к более правдоподобному решению декодера.

Теорема доказана.

Для случая работы взвешенного МПД внешнего кода при выполнении второй и последующих итераций декодирования справедлива теорема 2.

Теорема 2. Для канала типа ДСК при каждом изменении декодируемых символов на второй и последующей итерациях взвешенного многопорогового декодера внешнего кода при весе символов внешнего кода $\Delta_{ij} = d_1 - 2l_{ij}$ происходит переход к более правдоподобному решению всего каскадного кода в целом по сравнению с предыдущим решением декодера.

Для доказательства данной теоремы также определяются расстояния между принятым из канала сообщением и решением декодера до и после изменения декодируемого символа и показывается, что это расстояние при изменении декодируемого символа в соответствии с (2) только уменьшается.

При работе предложенного каскадного метода коррекции ошибок в канале с АБГШ при использовании двоичной фазовой модуляции справедлива теорема 3, доказываемая аналогично.

Теорема 3. Для канала с АБГШ и модуляции типа BPSK при каждом изменении декодируемых символов на произвольной итерации взвешенного многопорогового декодера внешнего кода при весе символов внешнего кода $\Delta_{ij} = -l_{ij}$ происходит переход к более правдоподобному решению всего каскадного кода в целом по сравнению с предыдущим решением декодера.

Представленные теоремы показывают принципиальную возможность такого декодирования предложенного каскадного кода, при котором осуществляется строгое приближение решения декодера к принятому сообщению при каждом изменении декодируемого символа даже при большом числе итераций декодирования. Принципиально важно, что при этом сложность декодирования остается всего лишь линейной. Следует заметить, что в данном случае, как и в случае некаскадного МПД, для того, чтобы декодер внешнего кода был способен достигнуть решения оптимального декодера, следует выбирать коды, в наименьшей степени подверженные эффекту размножения ошибок [3, 4].

Далее допустим, что с помощью МПД внешнего кода было достигнуто решение оптимального декодера всего каскадного кода в целом. При этом справедливо следствие 1.

Следствие 1. Взвешенный МПД внешнего кода предложенной каскадной схемы не изменит решения оптимального декодера.

Доказательство.

Если бы взвешенный МПД внешнего кода изменил решение оптимального декодера хотя бы в одном символе, то при этом в соответствии с теоремами 1 и 2 он нашел бы другое кодовое слово, более близкое к принятому из канала сообщению, чем решение оптимального декодера. Но это невозможно, так как по определению ближайшим к принятому сообщению является решение оптимального декодера.

Следствие доказано.

Данное следствие доказывает устойчивость решения предложенного декодера каскадного кода относительно решения оптимального декодера. Другими словами, если декодер каскадного кода достигнет решения оптимального декодера, то он больше его не изменит.

Отметим, что при обсуждаемом варианте организации каскадирования предлагаемая каскадная схема позволяет исправлять существенно большее число ошибок, чем при обычном каскадировании. Напомним, что при использовании обычного кода произведения, в котором данные кодируются по строкам кодом с кодовым расстоянием d_1 , и кодируются по столбцам кодом с кодовым расстоянием d_2 , число исправляемых ошибок за одну итерацию декодирования для ДСК равно $(d_1-1)(d_2-1)/4$ (здесь и далее для упрощения описания предполагается, что d_1 и d_2 являются нечетными). При этом в процессе декодирования выполняется независимое декодирование

кодов по строкам и по столбцам. За несколько итераций декодирования такой декодер кода произведения может исправить до $(d_1+1)(d_2+1)/4-1$ ошибки ДСК включительно [10]. Следующая теорема показывает, что при использовании предложенного варианта организации каскадирования в канале типа ДСК и при применении для декодирования внешнего кода взвешенного МПД, использующего оценки надежности символов декодером внутреннего МПД, гарантированно исправляется до $(d_1d_2-1)/2$ ошибок ДСК.

Теорема 4. Декодер каскадного кода, состоящего из внутреннего СОК с кодовым расстоянием d_1 и внешнего СОК с кодовым расстоянием d_2 , использующий взвешенный МПД для декодирования внешнего кода при весе символов $\Delta_{ij} = d_1 - 2l_{ij}$, позволяет исправлять любую конфигурацию из не более чем $(d_1d_2-1)/2$ ошибок при работе в ДСК.

Отметим, что определяемое данной теоремой число исправляемых ошибок предложенным декодером является максимально достижимым значением для кодов произведения [10] и примерно в два раза превосходит корректирующую способность известных декодеров кодов произведения, развиваемых с 1954 года [11].

Результаты экспериментального исследования

На рис. 1 кривой 6 показаны экспериментальные характеристики предложенного декодера каскадных кодов, состоящего из внутреннего СОК с кодовым расстоянием 7 при кодовой скорости 1/2 и внешнего СОК с кодовым расстоянием 5. Данные результаты соответствуют случаю работы предложенной каскадной схемы в канале с АБГШ при двоичной ФМ. Из сравнения представленных зависимостей с ранее описанными следует, что использование совместно с внутренним СОК внешнего СОК позволяет приблизить область эффективной работы МПД к пропускной способности канала на 1 дБ и более. При этом сложность декодирования остается на прежнем линейном уровне.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №08-07-00078), Института космических исследований, Рязанского государственного радиотехнического университета.

Литература

1. Золотарёв В.В., Зубарев Ю.Б., Овечкин Г.В., Обзор методов помехоустойчивого кодирования с использованием многопороговых алгоритмов // Цифровая обработка сигналов, 2008, №1, С.2–11.
2. Золотарев В.В. Теория и алгоритмы многопорогового декодирования – М.: Радио и связь, Горячая линия – Телеком, 2006. 232 с.
3. Золотарёв В.В., Овечкин Г.В. Помехоустойчивое кодирование. Методы и алгоритмы. Справочник. М.: Горячая линия – Телеком, 2004. 126 с.
4. Веб-сайт www.mtdbest.ru.
5. Золотарёв В.В., Овечкин Г.В. Применение многопорогового декодера в схемах с параллельным каскадированием // труды 59 науч. сессии, посв. Дню радио. М.: 2004, Том 2. С. 121–123.

6. Форни Д. Каскадные коды / Пер. с англ. под ред. Самойленко С.И. – М.: Мир, 1970, 208 с.

7. Овечкин Г.В., Овечкин П.В. Эффективность каскадной схемы кодирования на базе многопорогового декодера и кодов Хэмминга // Математическое и программное обеспечение вычислительных систем: Межвуз. сб. науч. тр. Рязань: РГРТА, 2004. С. 79–82.

8. Гринченко Н.Н., Овечкин Г.В., Овечкин П.В. Разработка каскадных схем кодирования на основе многопороговых декодеров // 8-я межд. конф. и выст. «Цифровая обработка сигналов и ее применение». М.: 2006. Том 1. С. 60–63.

9. Золотарёв В.В., Овечкин Г.В. Использование многопорогового декодера в каскадных схемах // Вестник РГРТА. 2003. Вып. 11. С. 112–115.

10. Chen X., Reed I.S. Error-Control Coding for Data Networks, Boston, MA: Kluwer Academic Publishers. 1999.

11. Elias P. Error-free coding. IRE Trans. Info. Theory, 1954, Vol. 4, pp.29–37.