РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2010, том 55, № 3, с. 324–329

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 681.391

ЭФФЕКТИВНОЕ МНОГОПОРОГОВОЕ ДЕКОДИРОВАНИЕ НЕДВОИЧНЫХ КОДОВ

© 2010 г. В. В. Золотарёв, Г. В. Овечкин

Поступила в редакцию 29.04.2009 г.

Представлено обобщение основных принципов многопорогового декодирования (МПД) на недвоичные коды. Предложены нижние оценки вероятности ошибки предлагаемого декодера, приведены экспериментальные результаты. Показано, что эффективность недвоичного МПД близка к результатам, обеспечиваемым оптимальными переборными методами, которые для недвоичных кодов обычно нереализуемы. Рассмотрены вопросы сложности реализации предлагаемых декодеров.

РВВЕДЕНИЕ

В ряде публикаций [1–6] показано, что результаты работы многопороговых декодеров (МПД) в гауссовских каналах с двоичной фазовой модуляцией во многих случаях оказываются совпадающими с характеристиками оптимального декодирования (ОД) или близкими к ним даже при высоком уровне шума. Однако в реальных системах часто удобно работать с данными, имеющими байтовую структуру. Например, удобнее работать с байтами в системах хранения больших объемов информации (оптические диски и другие носители). В подобных системах для защиты данных от ошибок целесообразно применение недвоичных помехоустойчивых кодов.

До недавнего времени вообще не было сколько-нибудь эффективных и одновременно достаточно простых методов кодирования и декодирования недвоичных (символьных) данных, кроме использования кодов Рида–Соломона (РС). Однако короткие коды РС до длины $n = 255$ символов не обеспечивают необходимых в настоящее время уровней достоверности. А декодеры для длинных кодов РС оказываются слишком сложными, и их возможное существенное упрощение весьма проблематично. В последнее время зарубежные специалисты активно развивают декодеры недвоичных низкоплотностных кодов [7–9]. Данные методы обладают очень высокой корректирующей способностью, однако сложность их реализации, особенно при больших размерах алфавита q, оказывается слишком большой для применения в реальных системах.

Ниже предложено обобщение МПД на недвоичные симметричные каналы [6, 10, 11]. Показано, что недвоичный аналог алгоритма МПД (далее – qМПД) может обеспечить при весьма высоких уровнях шума вероятности ошибки декодирования, в ряде случаев вообще недоступные для кодов РС сколько угодно большой длины. При этом сложность реализации такого алгоритма будет крайне незначительной, линейно растущей с длиной кода, т.е. теоретически минимально возможной.

1. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ НЕДВОИЧНОГО МПД

Перейдем к более формализованному описанию многопорогового алгоритма декодирования недвоичных кодов [3, 4].

Пусть задан q-ичный, $q > 2$, симметричный канал (qСК) с вероятностью ошибки $P_0 > 0$ такой, что при передаче любой исходный символ кода переходит в один из оставшихся $q - 1$ символов случайно, независимо и равновероятно. Для qСК оптимальным решением при передаче любого сообщения будет такое, возможно единственное, кодовое слово из q^{nR} возможных, которое отличается от принятого сообщения в минимальном числе символов кода (n – длина кода в символах, R – кодовая скорость, $R < 1$).

Рассмотрим линейный недвоичный систематический код, проверочная матрица $\mathbf{H}$ которого размером $(n - k) \times n$ имеет вид

$$\mathbf{H} = [\mathbf{C} : -I_{n-k}],$$

где k – длина информационной части кода; I_{n-k} – единичная матрица размером $(n - k) \times (n - k)$; $\mathbf{C}$ – матрица размером $(n - k) \times k$, состоящая из нулей и единиц, i-я строка которой определяет информационные символы, участвующие в i-й проверке; операция $[\mathbf{A} : \mathbf{B}]$ определяет матрицу, полученную горизонтальной конкатенацией (объединением) матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

Пусть матрица $\mathbf{H}$ соответствует недвоичному самоортогональному коду. Для такого кода структура матрицы $\mathbf{C}$ подробно описана в [4]. Поскольку проверочная матрица $\mathbf{H}$ кода (а значит, и порождающая матрица $\mathbf{G} = [\mathbf{I}_k : \mathbf{C}^T]$) содержит только 0, 1 и −1, то операции кодера и декодера по формированию проверочных символов кода и вычислению вектора синдрома $\mathbf{S}$ длиной $n - k$ принятого сообщения являются только сложениями и вычитаниями. Таким образом, для кодирования и декодирования не требуется наличие недвоичного поля, а достаточно создать только любой вариант группы по сложению, например, все операции сложения и вычитания будут производиться в некоторой группе целых чисел по модулю q. Это очень существенно упрощает все процедуры кодирования и реализации последующего декодирования.

Пусть после передачи кодового вектора $\mathbf{A}$ длиной n с k информационными символами по qСК в декодер поступает вектор $\mathbf{Q} = \mathbf{A} + \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ – вектор ошибок. Будем, как и в двоичном случае, представлять каждый вектор-столбец $\mathbf{X}$ длиной n в виде пары векторов $\mathbf{X}_I$ и $\mathbf{X}_V$ длиной k и $(n - k)$ соответственно, т.е. $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_I; \mathbf{X}_V]$. Здесь операция $[\mathbf{A}; \mathbf{B}]$ определяет матрицу, полученную вертикальной конкатенацией матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

Определим $\mathbf{D}$ как q-ичный вектор длиной k

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}_I - \mathbf{Q}_I,$$

где $\mathbf{A}_I$ – информационная часть переданного кодового слова $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_I; \mathbf{A}_V]$; $\mathbf{Q}_I$ – информационная часть принятого сообщения $\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_I; \mathbf{Q}_V]$. Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма

$$[\mathbf{D}; \mathbf{H} \times [\mathbf{Q}_I + \mathbf{D}; \mathbf{Q}_V]] = \mathbf{A} - \mathbf{Q}. \quad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу линейности кода справедлива цепочка равенств

$$\mathbf{S} = \mathbf{H} \times [\mathbf{Q}_I + \mathbf{D}; \mathbf{Q}_V] = \mathbf{H} \times [\mathbf{Q}_I + \mathbf{D}; \mathbf{Q}_V + \mathbf{A}_V - \\ - \mathbf{A}_V] = \mathbf{H} \times \mathbf{A} + \mathbf{H} \times [\mathbf{0}_I; \mathbf{Q}_V - \mathbf{A}_V],$$

где $\mathbf{0}_I$ – нулевой вектор длиной k.

Учитывая, что для систематического кода

$$\mathbf{H} \times [\mathbf{0}_I; \mathbf{X}_V] = -\mathbf{X}_V,$$

получаем, что $\mathbf{S} = \mathbf{A}_V - \mathbf{Q}_V$. А так как $\mathbf{D} = \mathbf{A}_I - \mathbf{Q}_I$, то $[\mathbf{D}; \mathbf{S}] = \mathbf{A} - \mathbf{Q}$.

Лемма доказана.

Данная лемма устанавливает простое полезное соответствие между произвольным кодовым словом и принятым сообщением, аналогичное двоичному случаю [3, 4]. Фактически она утверждает, что для рассматриваемых кодов вектор синдрома $\mathbf{S}$ является разностью по проверочным символам между принятым сообщением $\mathbf{Q}$ и кодовым вектором $\mathbf{A}$ с информационной частью $\mathbf{A}_I$. Такая интерпретация вектора синдрома рассматривалась с различных сторон в работах [1, 4, 5].

Рассмотренная лемма позволяет доказать главное свойство qМПД алгоритма, который описан ниже.

Пусть при передаче по qСК кодового слова $\mathbf{A}$ в декодер поступил искаженный в канале связи вектор $\mathbf{Q} = \mathbf{A} + \mathbf{E}$. Аналогично двоичному случаю, разностный вектор $\mathbf{D}$, теперь уже q-ичный, перед началом процедуры декодирования примем равным $\mathbf{0}_I$. Далее будем считать, что декодер qМПД устроен так, что после вычисления обычным образом вектора синдрома $\mathbf{S} = \mathbf{H} \times \mathbf{Q}$ принятого сообщения процедура декодирования проходит по следующей схеме.

1. Для произвольно взятого q-ичного декодируемого информационного символа i_j подсчитывается число двух наиболее часто встречающихся значений проверок из общего числа J всех проверок, относящихся к символу i_j, а также символа d_j вектора $\mathbf{D}$, соответствующего символу i_j. Пусть значения этих двух проверок равны h_0 и h_1 ($0 \le h_0, h_1 \le q$), а их количество равно m_0 и m_1 соответственно, причем $m_0 \ge m_1$. Эта процедура аналогична подсчету суммы проверок на пороговом элементе двоичного МПД.

2. Если $m_0 - m_1 \le T$, где $T = 0, 1, 2, \ldots$ – целое неотрицательное число, то осуществляется переход к новому произвольному i_m, $m \ne j$, и далее к п. 1. Это тоже аналог процедуры сравнения с порогом в двоичном декодере.

3. Если $m_0 - m_1 > T$, то из i_j, d_j и всех J проверок для i_j вычитается оценка ошибки, равная h_0, затем происходит выбор нового i_m, $m \ne j$, и переход к п. 1.

Этот последний шаг цикла декодирования очередного символа есть просто процесс изменения декодируемого символа и коррекции через обратную связь всех символов синдрома, являющихся проверками относительно декодируемого символа. Нужно только учитывать, что, в отличие от двоичного МПД, процедуры сложения и вычитания в qМПД не тождественны.

Такие попытки декодирования могут быть повторены три, десять и более раз для каждого символа принятого сообщения.

При реализации алгоритма qМПД, как и в двоичном случае, удобно все информационные символы перебирать последовательно, а останавливать процедуру декодирования после фиксированного числа попыток коррекции ошибок или если при очередной такой попытке ни один из символов не изменил своего значения.

Для описанного алгоритма qМПД справедлива следующая основная теорема многопорогового декодирования недвоичных кодов.

Теорема. Пусть декодер реализует алгоритм qМПД для описанного выше недвоичного самоортогонального кода. Тогда при каждом изменении декодируемых символов происходит переход к более правдоподобному решению по сравнению с предыдущими состояниями декодера.

Предварительное обсуждение. Для классического канала qСК из двух кодовых векторов более близким к принятому из канала сообщению и, следовательно, более правдоподобным будет тот из них, который отличается от принятого вектора меньшим числом символов. Поэтому доказательство роста правдоподобия решений qМПД при каждом изменении декодируемых символов состоит просто в том, чтобы показать, что число символов нового кодового слова, совпадающих с символами принятого сообщения, увеличилось, т.е. расстояние Хемминга между ними уменьшилось. Для недвоичных символов это расстояние как раз соответствует количеству несовпадающих символов в двух векторах равной длины.

Итак, согласно свойствам вектора синдрома и разностного регистра по лемме для qМПД расстояние Хемминга между принятым вектором и текущим решением qМПД равно числу ненулевых символов синдрома и разностного регистра. Значит, для уменьшения этого расстояния, что будет соответствовать росту правдоподобия решений этого декодера, нужно найти другое кодовое слово, для которого общее число нулевых символов синдрома $\mathbf{S}$ и разностного вектора $\mathbf{D}$ увеличится. Напомним, что, как и в двоичном случае, здесь имеется в виду то кодовое слово, информационные символы которого находятся в соответствующих регистрах декодера.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть декодер содержит векторы

$$\mathbf{A}_{1I},\ \mathbf{D}_1 = \mathbf{A}_{1I} - \mathbf{Q}_I \text{ и } \mathbf{S}_1 = \mathbf{H} \times [\mathbf{Q}_I + \mathbf{D}_1; \mathbf{Q}_V],$$

где $\mathbf{A}_1 = [\mathbf{A}_{1I}; \mathbf{A}_{1V}]$ – произвольное кодовое слово; $\mathbf{Q}$ – принятое сообщение.

Покажем, что в случае использования алгоритма qМПД при изменении очередного декодируемого символа i_j в текущем информационном векторе-решении декодера $\mathbf{A}_{1I}$ получается такой новый вектор $\mathbf{A}_{2I}$, что расстояние Хемминга до принятого вектора $\mathbf{Q}$ у кодового слова $\mathbf{A}_2$ меньше, чем у предыдущего решения декодера $\mathbf{A}_1$, т.е. $|\mathbf{A}_1 - \mathbf{Q}| > |\mathbf{A}_2 - \mathbf{Q}|$.

Действительно, если некоторый символ i_j изменен, значит, нашлось единственное значение h_0, $h_0 \neq 0$, на множестве проверок символа i_j, которое встречается строго чаще всех других, m_0 раз, а все другие – не более m_1 раз, $m_0 > m_1$. В этом случае при изменении i_j, d_j и всех J проверок в регистре синдрома, т.е. после вычитания из них величины h_0, все m_0 проверок (и, может быть, символ d_j), которые были равны h_0, станут равными нулю. Количество нулевых проверок в векторе синдрома (конечно, с учетом и значения символа d_j), которые до изменения символа i_j были равны нулю, не может быть больше m_1. Но это значит, что при изменении i_j за счет этих символов вес вектора синдрома не может возрасти на этих позициях более чем на m_1. Тогда общее изменение веса равно $m_1 - m_0 < 0$, т.е. суммарный вес векторов $\mathbf{S}$ и $\mathbf{D}$ после изменения декодируемого символа i_j уменьшится. Также отметим, что вектор $\mathbf{S}_2$ отличается от $\mathbf{S}_1$ только в тех символах, которые являются для i_j проверками, а разностные векторы $\mathbf{D}_2$ и $\mathbf{D}_1$ не совпадают только в позиции d_j на величину h_0, как и соответствующие символу i_j проверки. Но это значит, что после изменения i_j в декодере типа qМПД содержатся векторы $\mathbf{S}_2$ и $\mathbf{D}_2$, соответствующие разности принятого вектора и нового решения декодера, т.е. выполняется условие (1). Но тогда получаем, что и в новом состоянии декодера снова справедливы условия леммы, что позволяет перейти к очередной попытке коррекции символа i_m, $m \neq j$, в результате которой изменение следующего декодируемого символа снова гарантирует переход к новому еще более правдоподобному решению и т.д. Теорема доказана.

Отметим два наиболее существенных момента, характеризующих предложенный алгоритм. Во-первых, как и в случае двоичных кодов, нельзя утверждать, что улучшение решения при многократных попытках декодирования будет иметь место до тех пор, пока не будет достигнуто решение ОД. На самом деле в самоортогональных кодах возможны конфигурации ошибок, которые не исправляются в qМПД, но могут быть исправлены в ОД. Поэтому основной способ повышения эффективности qМПД состоит в поиске кодов, в которых такие неисправляемые конфигурации ошибок довольно редки даже при большом уровне шума.

Другим важнейшим моментом является то, что по сравнению с традиционным подходом к двоичным мажоритарным схемам, в qМПД для изменения декодируемого символа достаточно наличия не абсолютного, а только относительно строгого большинства проверок, как это следует из условия $m_0 - m_1 > T$. Например, в самоортогональном коде с $d = 9$ ошибка в декодируемом символе будет исправлена даже в том случае, если из девяти его проверок (включая и символ d_j разностного регистра) правильными будут только две, а остальные семь – ошибочными. Такое событие невозможно в случае двоичных кодов, а для qМПД данная ситуация типична. Единственным условием для этого примера являются разные значения проверок относительно декодируемого символа i_j. А для больших значений q это условие выполняется практически всегда. Эти свойства qМПД существенно расширяют его возможности при работе в больших шумах, сохраняя при этом весьма малую сложность процедур мажоритарного типа и в q-ичных каналах.

2. НИЖНИЕ ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТИ ОШИБКИ ДЕКОДИРОВАНИЯ

Рассмотрим вычисление нижней оценки вероятности оптимального декодирования для кода, задаваемого описанным выше способом. Для этого выявим наиболее часто встречающиеся условия, при которых у вектора ошибки расстояние Хемминга до ближайшего ненулевого кодового слова будет меньше его собственного веса. В силу линейности кода этого достаточно для вынесения неправильного решения даже оптимальным переборным алгоритмом. Рассматривая вектор ошибки с такими свойствами, будем учитывать, что нужно анализировать только те символы этого вектора, которые соответствуют позициям проверок относительно очередного декодируемого символа i_k.

Выпишем вероятности некоторых наиболее простых событий, которые приводят к ошибкам ОД. К искомым векторам ошибки относятся следующие [4, 6, 11]:

1) все проверочные символы и декодируемый символ i_k ошибочны –

$$P_1(e) = P_0^{J+1}, \qquad (2)$$

где $d = J + 1$, d – минимальное кодовое расстояние самоортогонального кода;

2) все проверочные символы ошибочны, но два из них одинаковы, а i_k принят верно –

$$P_2(e) = \frac{J(J-1)(1-P_0)P_0^J}{2(q-1)}\prod_{i=1}^{J-2}\left(1-\frac{i}{q-1}\right); \qquad (3)$$

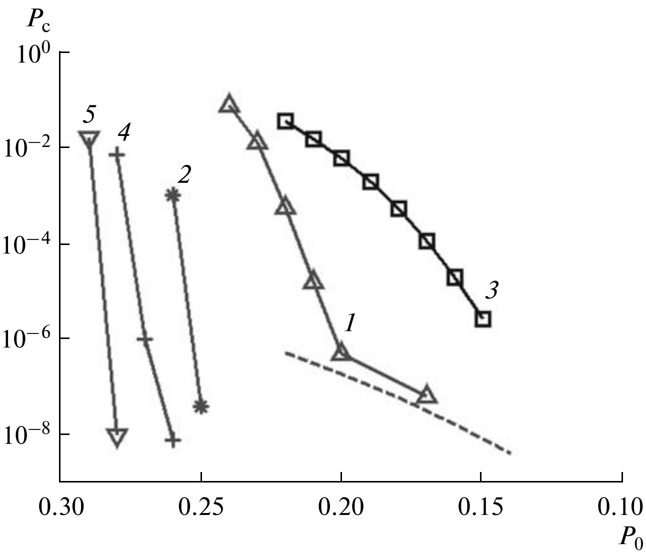
3) есть один правильно принятый проверочный символ, а остальные ошибочны, как и i_k –

$$P_3(e) = J(1-P_0)P_0^J. \qquad (4)$$

В результате нижняя граница вероятности ошибки для оптимального декодера определяется в соответствии с выражением

$$P_{\text{опт}} = P_1(e) + P_2(e) + P_3(e). \qquad (5)$$

Более полный анализ различных событий, приводящих к ошибкам недвоичного ОД, и оценки их вероятностей, а также вероятностей ошибки в первом символе недвоичного порогового декодера, которые можно считать верхними оценками для вероятности ошибки qМПД, приведены в [3, 4, 6, 11].



Характеристики qМПД для кодов с $R = 1/2$ в qСК (*1–5* – пояснения в тексте).

Перечисление указанных событий вполне достаточно, чтобы для большинства реальных условий применения кодов получать удовлетворительные по точности вероятностные оценки потенциальной помехоустойчивости кода. А поскольку qМПД на каждом шаге стремится к решению ОД, то можно ожидать, что при некотором достаточно высоком уровне шума он во многих случаях достигнет искомого оптимального решения, поиск которого обычно требует экспоненциально растущего с длиной кода n перебора. В случае qМПД сложность декодера остается линейной функцией от n, т.е. теоретически минимально возможной.

3. ХАРАКТЕРИСТИКИ qМПД В qСК

На рисунке представлены полученные при помощи компьютерного моделирования зависимости вероятности символьной ошибки декодирования qМПД P_c от вероятности символьной ошибки в qСК P_0 для кодов с кодовой скоростью $R = 1/2$. Здесь кривые *1* и *2* соответствуют характеристикам qМПД для кодов длиной 4000 и 32000 однобайтовых символов ($q = 256$) с кодовым расстоянием $d = 13$ и $d = 17$ соответственно. При этом в процессе исправления ошибок использовалось от 5 до 15 итераций декодирования. Штриховой линией показана нижняя граница $P_{\text{опт}}$ вероятности символьной ошибки ОД для первого кода с $d = 13$. Видно, что qМПД практически достигает эффективности ОД даже при очень высоком уровне шума в канале. Для сравнения на рисунке приведены характеристики (255, 128) кода РС при таком же размере алфавита

$q = 256$ (кривая *3*). Отметим, что qМПД обеспечивает гораздо лучшую эффективность, чем коды РС для символов того же размера, благодаря большей длине используемых кодов и хорошей сходимости решений qМПД к решению ОД. Для достижения с помощью qМПД таких результатов требуется очень тщательно выбирать параметры декодирования и применяемые коды. Основным критерием при отборе кодов является степень их устойчивости к эффекту размножения ошибок, который проявляется в том, что после первой ошибки декодирования существенно увеличивается вероятность последующих ошибок. Это может привести к появлению пакетов ошибок на выходе декодера. Подробное описание принципов выбора кодов, устойчивых к эффекту размножения ошибок, представлено в [4].

Дополнительным преимуществом qМПД над другими методами коррекции ошибок является то, что он позволяет легко работать с символами практически любого размера, обеспечивая при этом такую же высокую корректирующую способность. Это подтверждается представленными на рисунке характеристиками qМПД для кода с $n = 32000$, $d = 17$ и с двухбайтовыми (кривая *4*) и четырехбайтовыми (кривая *5*) символами.

Дальнейшее значительное улучшение эффективности декодирования алгоритмами qМПД возможно при переходе к сверточным кодам, методам последовательного и параллельного каскадного кодирования, применению кодов с выделенными ветвями и другим мерам, которые частично описаны в работах [3–5].

4. СЛОЖНОСТЬ РЕАЛИЗАЦИИ ДЕКОДЕРА qМПД

Рассмотрение недвоичного МПД показывает, что линейная сложность декодирования сохраняется. Очевидно, что число операций, выполняемых при декодировании одного символа, определяется только кодовым расстоянием используемого кода и совершенно не зависит ни от длины кода, ни от размера используемых символов. При программной реализации qМПД подпрограмма работы его порогового элемента, которая составляет практически весь декодер, занимает менее десятка коротких строк на языке С++ и обеспечивает обработку одновременно такого количества байтов принятого или хранимого сообщения, которое допускает архитектура используемого процессора. Демопрограмма для символьного qМПД, представленная для всеобщего использования на веб-сайте [3], при работе на обычном персональном компьютере демонстрирует практически оптимальное декодирование очень длинных кодов со скоростью более 10 Мбит/с. При этом демопрограмма выполняет полную имитацию работы всего тракта передачи данных: формирование информационного потока, кодирование, внесение шума и работу обсуждаемого алгоритма декодирования. Так что реальная производительность программного qМПД декодера может считаться большей еще примерно в полтора–два и даже более раз.

Следует особо отметить, что сложность повсеместно применяемых в настоящее время декодеров кодов РС пропорциональна квадрату длины кода. Причем данные коды при этом обладают существенно меньшей эффективностью, чем qМПД. Разнообразные методы повышения корректирующей способности кодов РС, в том числе все вариации алгоритма Судана, обладают сложностью порядка n^3. Для кодов длиной 30000 символов это приводит к разнице в порядке сложности около $n^2 = 30000^2 \approx 10^9$, т.е. в миллиард раз, при этом улучшение помехоустойчивости оказывается весьма незначительным. Таким образом, показано, что применение любых новых самых сложных методов декорирования для кодов РС малоэффективно по сравнению с предложенным qМПД.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Возможности символьных МПД алгоритмов оказываются по вероятности ошибки и по числу операций декодирования на много порядков лучше, чем у кодов Рида–Соломона, по праву считавшихся в течение почти полувека лучшими недвоичными кодами. Это определяется эффективным переносом идей двоичного многопорогового декодирования на очень просто организованные недвоичные коды сколь угодно большой длины. В результате недоступный ранее уровень помехоустойчивости, получаемый с помощью алгоритмов МПД разных типов, позволяет решать задачи обеспечения высокой надежности передачи и хранения данных без какой-либо дополнительной доработки этих алгоритмов или всего лишь при незначительной их адаптации к возможным дополнительным требованиям, возникающим в крупномасштабных цифровых системах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-07-00078).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самойленко С.И., Давыдов А.А., Золотарёв В.В., Третьякова Е.И.* Вычислительные сети. М.: Наука, 1981.
2. *Золотарёв В.В., Овечкин Г.В.* // Электросвязь. 2003. № 9. С. 34.

3. www.mtdbest.iki.rssi.ru
4. *Золотарёв В.В.* Теория и алгоритмы многопорогового декодирования. М.: Радио и связь, Горячая линия-Телеком, 2006.
5. *Золотарёв В.В., Овечкин Г.В.* Помехоустойчивое кодирование. Методы и алгоритмы (Справочник). М.: Горячая линия-Телеком, 2004.
6. *Золотарёв В.В.* // Мобильные системы. 2006. № 3. С. 25.
7. *Bennatan A., Burshtein D.* // IEEE Trans. 2006. V. IT-52. № 2. P.549.
8. *Zhang F., Pflster H.D.* // Proc. IEEE Global Telecommun. Conf. (GLOBECOM'07). Washington. 26–30 Nov. 2007. N.Y.: IEEE, 2007. P.283.
9. *Declercq D., Fossorier M.* // Proc. Int. Symp. on Information Theory (ISIT 2005). Adelaide. 4–9 Sep. 2005. N.Y.: IEEE, 2005. P.464.
10. www.mtdbest.iki.rssi.ru/pdf/qmtd_iscta07.pdf
11. *Золотарёв В.В.* // Мобильные системы. 2007. № 3. С. 39.
12. *Townsend R.L., Weldon E.J.* // IEEE Trans. 1967.V. IT-13. № 2. P.183.
13. *Sudan M.* // J. Complexity. 1997. V. 13. P.180.
14. *Золотарёв В.В.* // Мобильные системы. 2008. № 3. С. 66.