

УДК 681.391:519.72

## ЭФФЕКТИВНЫЕ МНОГОПороГОВЫЕ МЕТОДЫ ДЕКОДИРОВАНИЯ САМООРТОГОНАЛЬНЫХ КОДОВ

**В. В. Золотарев**, д.т.н., ведущий научный сотрудник ИКИ РАН; zolotasd@yandex.ru

**Г. В. Овечкин**, д.т.н., профессор кафедры ВПМ, РГРТУ; g\_ovechkin@mail.ru

**П. В. Овечкин**, к.т.н., доцент кафедры ВПМ, РГРТУ; pavel\_ov@mail.ru

*Представлены результаты многолетних исследований в области разработки эффективных и простых для реализации многопороговых методов декодирования (МПД) самоортогональных кодов. Изложены основы многопорогового декодирования, показаны возможности его реализации на современной элементной базе. Выполнен сравнительный анализ эффективности МПД и основанных на них каскадных методов коррекции ошибок с эффективностью декодеров лучших помехоустойчивых кодов в двоичном гауссовском канале, в недвоичном симметричном канале и в канале со стираниями. Показано, что МПД обеспечивают сопоставимую с другими методами эффективность при многократно меньшей сложности реализации.*

**Ключевые слова:** помехоустойчивое кодирование, многопороговый декодер, самоортогональные коды, каскадные коды, сложность декодера, двоичный гауссовский канал,  $q$ -ичный симметричный канал, канал со стираниями, системы передачи данных.

DOI: 10.21667/1995-4565-2016-60-2-113-122

### Введение

Помехоустойчивое кодирование используется для исправления ошибок, возникающих при передаче цифровых данных по каналам с шумами. Его применение позволяет улучшить многие важные характеристики систем передачи данных, например, увеличивать дальность связи, экономить мощность передатчика, повышать скорость передачи данных и другие [1]. Поэтому разработка эффективных методов кодирования и декодирования помехоустойчивых кодов является актуальной задачей.

Существующие помехоустойчивые коды (короткие сверточные, турбо и турбоподобные, низкоплотностные, полярные) и алгоритмы их декодирования в некоторых случаях позволяют обеспечить работу при отношении сигнал-шум всего на 0,5..1,5 дБ большем теоретически возможного. Однако сложность декодеров таких кодов является неприемлемо большой для их использования в высокоскоростных системах передачи данных. Поэтому разработчикам систем связи приходится или использовать очень дорогие аппаратные средства, или идти на упрощение алгоритмов декодирования, приводящее к некоторому ухудшению характеристик.

В нашей стране в Институте космических исследований (ИКИ РАН) и Рязанском государственном радиотехническом университете

(РГРТУ) уже более 25 лет ведутся работы, в рамках которых разрабатываются методы декодирования самоортогональных помехоустойчивых кодов, называемые алгоритмами многопорогового декодирования (МПД) [2, 3, 4], которые наряду с малой сложностью реализации обладают высокой эффективностью. Результаты, представленные в многочисленных публикациях, показывают, что алгоритм МПД, построенный на принципиально новых, но весьма неожиданных для теории кодирования принципах, позволяет решать практически все основные проблемы высококачественного исправления ошибок в принятых из канала связи цифровых данных.

Отметим, что МПД хотя и незначительно уступают декодерам для турбо и низкоплотностных кодов по обеспечиваемому энергетическому выигрышу, являются чрезвычайно простыми для программной и аппаратной реализации, что позволяет создавать недорогие кодеки МПД для высокоскоростных цифровых систем передачи данных различного назначения. При этом для МПД известны способы увеличения эффективности, позволяющие за счет незначительного роста вычислительной сложности получать больший энергетический выигрыш по сравнению с исходным МПД.

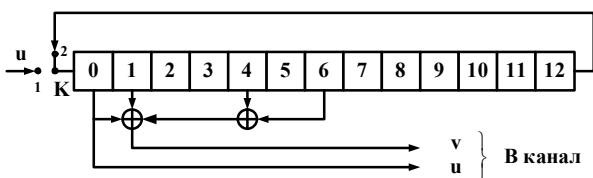
В статье представлены основные результаты многолетних исследований, полученные специалистами ИКИ РАН и РГРТУ в области разработ-

ки многопороговых методов декодирования самоортогональных кодов.

**Принципы многопорогового декодирования самоортогональных кодов**

Самоортогональные коды (СОК) являются мажоритарно декодируемыми кодами [5]. Для них свойственно то, что система проверок, контролирующая ошибку в любом информационном символе, является ортогональной относительно этой ошибки. Отметим, что под ортогональностью системы проверок относительно ошибки в данном случае понимается то, что эта ошибка входит во все проверки системы, и ни одна другая ошибка не входит более чем в одну проверку. Для задания СОК обычно используют образующие полиномы  $g(x)$ , для которых все положительные разности между степенями полинома с ненулевыми коэффициентами различны. Для обычных блочных СОК с кодовой скоростью  $R=1/2$  кодовое расстояние  $d$  равно увеличенному на 1 числу ненулевых коэффициентов полинома  $g(x)$ , информационная длина блока  $k$  равна как минимум  $2m+1$  (здесь  $m$  – максимальная степень образующего полинома), длина кода  $n$  равна  $2k$ .

Процедура кодирования СОК может быть реализована с использованием простейших схем, использующих регистры сдвига и сумматоры по модулю 2. Пример такой схемы для блочного СОК показан на рис. 1 [6]. Этот СОК задается полиномом  $g(x)=1+x+x^4+x^6$  и характеризуется параметрами  $n=26, k=13, R=1/2, d=5$ .



**Рисунок 1 – Кодер блочного СОК с  $R=1/2, d=5$  и  $n=26$**

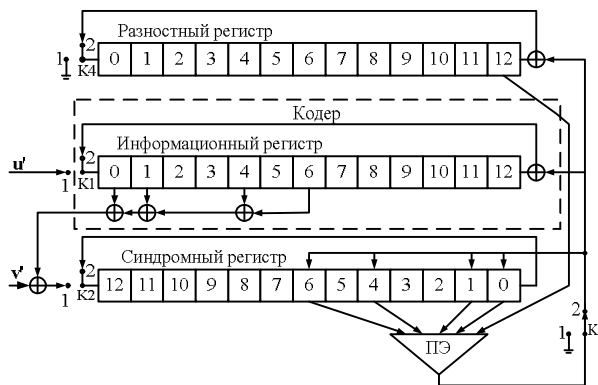
Для декодирования СОК можно использовать многопороговые алгоритмы декодирования [2, 3, 4], которые являются развитием простейшего порогового декодера Мессе [5]. Данные декодеры также могут быть реализованы с использованием схем, построенных на основе регистров сдвига и сумматоров по модулю 2. Пример схемы, реализующей МПД для блочного СОК, заданного образующим полиномом  $g(x)=1+x+x^4+x^6$ , показан на рисунке 2 [6].

Заметим, что при декодировании с помощью МПД некоторого информационного символа  $u_j$  вычисляется функция  $L_j$ , которая зависит от элементов синдрома  $s_{j_k}$  и соответствующего эле-

мента разностного регистра  $d_j$ . В случае работы в двоичном симметричном канале эта функция имеет вид

$$L_j = \sum_{s_{j_k} \in \{S_j\}} s_{j_k} + d_j, \tag{1}$$

где  $\{S_j\}$  – множество проверок (элементов синдрома) относительно ошибки  $e_j$  в декодируемом символе  $u_j$ . При превышении функцией  $L_j$  некоторого порога (в общем случае равного половине числа слагаемых) осуществляется изменение декодируемого информационного символа, соответствующего элемента разностного регистра и элементов синдрома, участвующих в вычислении функции  $L_j$ .



**Рисунок 2 – Многопороговый декодер блочного СОК с  $R=1/2, d=5$  и  $n=26$**

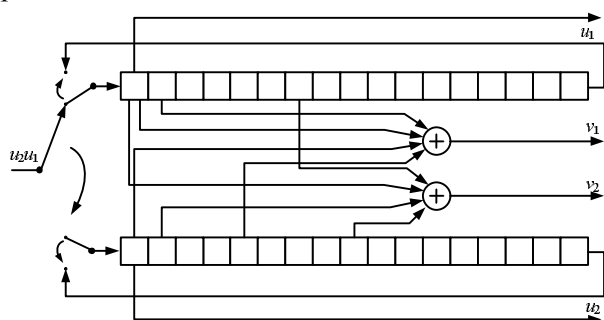
При работе МПД в гауссовском канале и наличии мягких решений демодулятора для текущего декодируемого символа  $u_j$  также вычисляется функция  $L_j$ . При этом элементы синдрома и элемент разностного регистра должны суммироваться с коэффициентами, отражающими их надежность:

$$L_j = \sum_{s_{j_k} \in \{S_j\}} (2s_{j_k} - 1)w_{j_k} + (2d_j - 1)w_j, \tag{2}$$

где  $w_{j_k}$  – коэффициент, отражающий надежность проверки  $s_{j_k}$ ;  $w_j$  – коэффициент, отражающий надежность декодируемого символа  $u_j$ . Данные коэффициенты являются функциями мягких решений демодулятора.

В [2, 3] показано, что МПД с каждым изменением декодируемого символа обязательно приближает собственное решение к решению оптимального (по максимуму правдоподобия) декодера. Это объясняется тем, что при любом изменении информационного символа общий вес синдромного и разностного регистров строго уменьшается и, следовательно, осуществляется переход к более правдоподобному кодовому слову. В результате после выполнения ряда итераций декодирования МПД может достичь решения оптимального декодера.

Отметим, что к настоящему времени известен ряд подходов, позволяющих повысить эффективность МПД. Одним из способов приближения области эффективной работы МПД к пропускной способности канала является выбор кодов, в наименьшей степени подверженных размножению ошибок (РО) декодирования [2, 3, 7]. Данное свойство проявляется в том, что после того, как декодер при работе совершает ошибку, вероятность ошибки в следующих символах существенно возрастает. В работе [7] предложен подход, позволяющий оценить устойчивость кода к РО и построить коды, в максимальной степени устойчивые к РО. Отметим, что лучшей устойчивостью к РО обладают коды, имеющие по несколько информационных и проверочных ветвей (коды с кратными скоростями). Для примера на рисунке 3 представлен кодер блокового кода с двумя информационными и двумя проверочными ветвями.



**Рисунок 3 – Схема кодера с двумя информационными и двумя проверочными ветвями**

При использовании кода такой структуры удастся добиться существенного увеличения устойчивости к РО за счет уменьшения числа общих ошибок, участвующих при декодировании разных информационных символов [7]. Следует особо отметить, что программная и аппаратная реализация МПД для кода с кратными скоростями также не представляет никакой сложности. В работе [8] показано, что получить дополнительный выигрыш 1..1,5 дБ можно только за счет выбора кода и оптимизации его структуры без увеличения сложности декодера.

Еще одно направление работ по повышению эффективности этих алгоритмов коррекции ошибок связано с разработкой каскадных схем кодирования, составной частью которых является СОК, декодируемый с помощью МПД [2, 3, 9, 10, 11]. Отметим, что для того, чтобы общая сложность схемы сильно не увеличилась, следует осуществлять каскадирование СОК только с простыми для декодирования кодами, в качестве ко-

торых авторы использовали коды с контролем четности (ККЧ), коды Хэмминга и короткие СОК.

### **Аппаратная реализация многопороговых алгоритмов**

Известные технические решения [12, 13] превращают МПД в теоретически самое быстродействующее устройство обработки, так как регистры сдвига декодера перемещают поступающие в него данные с максимально возможной для них скоростью для выбранной элементной базы. Кроме того, так как МПД алгоритмы особенно эффективны при кратных скоростях, то, применяя, например, не коды с  $R = 1/2$ , а коды с  $R = 4/8$ , когда используются 4 информационных и 4 проверочных регистра, или даже коды с  $R = 16/32$ , можно многократно увеличить быстродействие МПД декодера.

Отметим, что предельно возможная теоретическая скорость при аппаратной реализации определяется возможностью при заданных максимальных скоростях записи и чтения информации в чипе, содержащем МПД, создавать для любой элементной базы такие МПД декодеры, что их включение в состав аппаратуры не снижает скорость перемещения данных в этом чипе. Наличие в нем декодера МПД ведет только к задержке продвижения данных по чипу, равной задержке принятия решения декодером выбранного кода. Такое свойство МПД можно назвать максимальной аппаратной теоретической производительностью. Простота и высокая скорость работы МПД алгоритмов хорошо иллюстрируется демопрограммами на ресурсах [4]. Например, МПД на персональном компьютере с процессором Intel Core i7 декодирует сверточный код при большом шуме гауссовского канала со скоростью более 15 Мбит/с. Ко всем демопрограммам приложены детальные инструкции.

На рис. 4 представлен разработанный в 2007 г. в ИКИ РАН макет МПД декодера на ПЛИС Altera, способный работать в спутниковых и космических каналах на информационных скоростях более 1 Гбит/с при кодовой скорости  $R = 1/2$  [13]. В нем полностью реализованы запатентованные методы сверхбыстрого декодирования, вообще не снижающие скоростных характеристик используемых микросхем. Он обеспечивает самые высокие характеристики по скорости и достоверности любых перспективных систем ДЗЗ. Вероятность ошибки на бит  $P_b$  на выходе этого МПД декодера может быть в диапазоне  $P_b(e) = 10^{-7}..10^{-11}$  при отношении сигнал-шум на бит в районе 2 дБ.

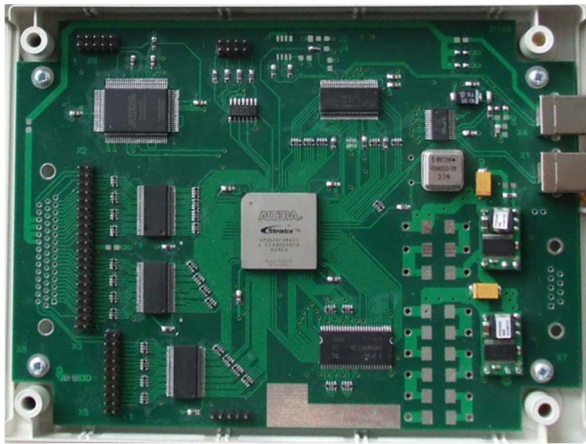


Рисунок 4 – МПД, разработанный в ИКИ РАН на ПЛИС Altera

### Характеристики многопороговых декодеров в двоичном гауссовском канале

Рассмотрим характеристики основных алгоритмов коррекции ошибок в гауссовском канале при использовании кодов с кодовой скоростью  $R=1/2$ , двоичной фазовой модуляции и демодулятора с мягкими решениями, представленные на рисунке 5. На нем показаны зависимости вероятности ошибки на бит  $P_b$  от битового отношения сигнал-шум  $E_b/N_0$  алгоритмов декодирования наиболее эффективных кодов.

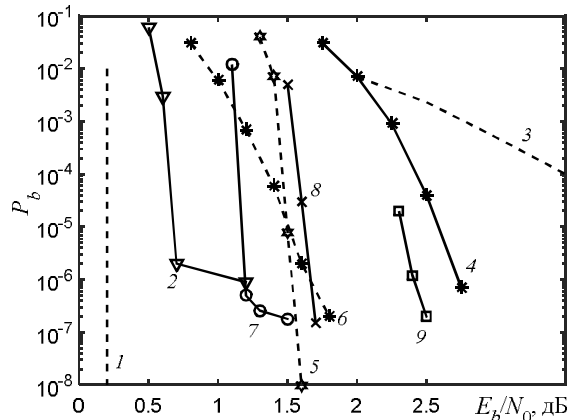


Рисунок 5 – Характеристики методов коррекции ошибок в гауссовском канале

Вертикаль 1 отмечает уровень шума, при котором пропускная способность канала  $C$  равна кодовой скорости  $C = R = 1/2$ . График 2 указывает на предельные возможности турбо кодов, которые, однако, до сих пор не могут быть воплощены в характеристики аппаратуры из-за сложности алгоритмов этого класса. Кривая 3 отражает возможности повсеместно применяемого алгоритма Витерби (АВ) для сверточных кодов с длиной кодирующего регистра  $K = 7$ . Зависимость 4 соответствует каскадной схеме на основе АВ и кода Рида-Соломона. Кривая 5 приведе-

на для min-sum декодера кода с низкой плотностью проверок на четность (LDPC) стандарта DVB-S2 длиной 64800 битов, реализованного в 2012 году в ФГУП НИИР. График 6 представляет реальные возможности декодера для турбо кода длиной 3060 битов стандарта CDMA2000.

Далее рассмотрим возможности многопороговых алгоритмов. Зависимость 7 демонстрирует новое достижение алгоритма, который оптимально декодирует длинный сверточный СОК при очень низкой энергетике гауссовского канала в 1,2 дБ, когда до его пропускной способности остается всего 1,0 дБ. Для работы декодера требуется не более  $I = 192$  итераций. По мере развития исследований количество итераций декодирования непрерывно снижается. Однако это не быстрый процесс. Величина задержки декодирования при сверточном кодировании составляет менее 6 Мбитов. Эта величина также понемногу уменьшается. Снижение допустимого уровня шума канала всего на несколько десятых децибела, естественно, сильно упрощает МПД алгоритм. Так, график 8 показывает возможности этого метода при  $I = 60$  итерациях и задержке решения сверточного декодера менее 1 Мбита. А последний декодер, представленный на графике 9, обладает тем важным свойством, что его возможности в самом обычном некаскадном формате сверточного декодирования оказываются лучше, чем у весьма мощной каскадной схемы (кривая 4). Этот декодер реализует 40 итераций и имеет задержку всего лишь втрое большую, чем сравниваемая с ним каскадная схема.

Далее укажем на основные преимущества всех представленных методов МПД перед прочими алгоритмами. АВ не является для МПД конкурентом в области столь высокого уровня шума канала. Каскадная схема с АВ находится на границе рисунка и также не участвует в конкурсе методов. Возможности первого МПД по эффективности декодирования при большом уровне шума не уступают лучшим из известных на текущий момент алгоритмов. Но опыт разработки МПД свидетельствует о том, что для МПД есть еще некоторая возможность улучшения его характеристик. Для дальнейшего существенного продвижения в сторону предела Шеннона  $R = C = 1/2$  или для других кодовых скоростей, конечно, потребуется значительная модернизация МПД, которая уже готовится.

Дополнительно отметим, что МПД способен обеспечить высокую эффективность коррекции ошибок и при работе в каналах связи с различного рода замираниями, в том числе вызванными многолучевым распространением сигнала [14, 15, 16].

### Характеристики МПД в двоичных каналах

Для современных систем хранения данных актуальной является задача защиты данных от искажений. Данная задача также решается на основе методов помехоустойчивого кодирования. При этом удобно использовать двоичные помехоустойчивые коды, работающие с данными на уровне символов. Следует отметить, что к настоящему времени среди двоичных помехоустойчивых кодов практическое применение нашли только коды Рида-Соломона (РС), которые были предложены более 50 лет назад. К сожалению, применяемые на практике декодеры для коротких кодов РС не могут обеспечить высокую эффективность коррекции ошибок при большом шуме в канале, а декодеры для длинных кодов РС невозможно создать из-за высокой сложности реализации. В ряде публикаций показано, что вместо кодов РС можно использовать символьные многопороговые декодеры ( $q$ МПД), позволяющие декодировать символьные самоортогональные коды ( $q$ СОК) [2, 3, 17, 18]. Данные декодеры позволяют обеспечить близкое к оптимальному декодирование даже очень длинных  $q$ СОК при высокой вероятности символьной ошибки в  $q$ -ичном симметричном канале ( $q$ СК).

Рассмотрим характеристики  $q$ МПД в  $q$ СК, в котором каждый символ искажается независимо от других с вероятностью  $P_0$ , причем при искажении символ с равной вероятностью переходит в один из  $q-1$  оставшихся символов. Такая модель, например, соответствует каналу с пакетами ошибок при использовании перемежения/деперемежения на уровне символов. На рисунке 6 представлены зависимости вероятности символьной ошибки  $P_s$  после декодирования от вероятности символьной ошибки  $P_0$  в  $q$ СК для различных кодов с кодовой скоростью  $R = 1/2$ .

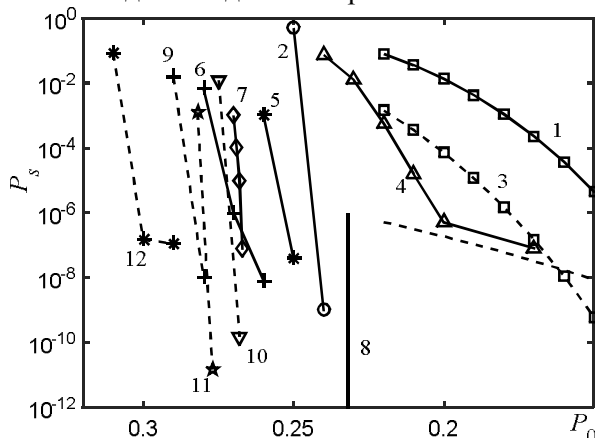


Рисунок 6 – Характеристики декодеров двоичных кодов с кодовой скоростью  $R=1/2$  в  $q$ СК

На данном рисунке кривые 4 и 5 отражают характеристики  $q$ МПД для кодов с длиной блока  $n = 4000$  и  $32000$  8-ми битовых символов (размер алфавита  $q = 256$ ). Объем эксперимента при получении нижних точек графиков составлял от  $5 \cdot 10^{10}$  до  $2 \cdot 10^{12}$  символов, что свидетельствует о крайней простоте метода. Для сравнения кривой 1 на рис. 6 показаны характеристики алгебраического декодера (255, 128) кодов РС для  $q = 256$ . Отметим, что эффективность  $q$ МПД оказывается гораздо лучше эффективности декодеров кодов РС для символов такого же размера. При увеличении длины кода в  $q$ МПД разница в эффективности с декодером кодов РС становится еще более существенной. Отметим, что разнообразные методы повышения корректирующей способности декодеров кодов РС, в том числе все вариации алгоритма Судана, имеют сложность порядка  $n^3$ . Для кода длины 32000 символов это приводит к разнице в сложности порядка  $n^2 = 32000^2 \approx 10^9$ , т.е. в миллиард раз, при этом улучшение помехоустойчивости оказывается весьма незначительным. Это продемонстрировано на рисунке 6 кривой 3, которой представлены характеристики алгоритма Судана при декодировании (255, 128) кода РС. Дополнительно отметим, что достаточно простой для реализации  $q$ МПД способен исправлять до 25 % байтовых ошибок в канале. При использовании же кодов РС даже с применением каскадирования удается обеспечить сопоставимую вероятность ошибки всего при 18 % символьных ошибок в канале при кодовой скорости 1/2 и 10 итерациях декодирования.

Еще одним преимуществом  $q$ МПД над другими методами коррекции символьных ошибок является то, что он позволяет одинаково легко работать с символами практически любого размера, обеспечивая при этом высокую корректирующую способность. Это иллюстрируется показанными на рисунке 6 характеристиками  $q$ МПД для  $q$ СОК длиной 32000 двухбайтовых символов (кривая 6) и длиной 100000 четырехбайтовых символов (кривая 9). Заметим, что очень простой для реализации  $q$ МПД декодер для кода длины 32000 двухбайтовых символов обеспечивает характеристики, принципиально недостижимые даже для декодера кода РС длины 65535 двухбайтовых символов (кривая 2 на рисунке 6), который не подлежит реализации в обозримом будущем из-за высокой сложности. Кроме того,  $q$ МПД для четырехбайтовых символов оказывается лучше по эффективности на три порядка более сложного декодера двоичных низкоплотных кодов длиной 100000 четырехбайтовых символов, предельные характеристики которого представлены на рисунке 6 прямой 8 [19].

Следует заметить, что для достижения с помощью  $q$ МПД таких результатов, как и в двоичном случае требуется очень тщательно выбирать применяемые коды, основным критерием при отборе которых является степень устойчивости к эффекту РО [2, 3, 7]. Также в [8] показано, что оптимизируя структуру кодов с параллельным каскадированием, можно улучшить эффективность работы  $q$ МПД. Для примера характеристики найденных в [8] кодов с  $q = 256$  и кодовой скоростью  $1/2$  показаны на рисунке 6 кривой 7. Отметим, что в данном случае только за счет выбора лучшей структуры кода удалось повысить долю исправляемых ошибок в  $q$ СК до 26,5 % без усложнения декодера.

Еще более значительное повышение эффективности  $q$ МПД обеспечивается при использовании каскадных методов коррекции ошибок, основанных на  $q$ МПД. Первый метод основан на использовании каскадного кода, состоящего из внутреннего  $q$ СОК и предложенных внешних недвоичных кодов Хэмминга [9, 11]. При кодировании каскадным кодом исходные данные сначала кодируются внешним кодом, в результате чего получается несколько кодовых слов недвоичного кода Хэмминга, которые кодируются кодером внутреннего кода, образуя кодовое слово  $q$ СОК.

Для разработанного декодера такого каскадного кода получены как аналитические оценки эффективности, так и результаты компьютерного моделирования. Для примера на рисунке 6 кривой 10 представлены характеристики каскадной схемы, состоящей из  $q$ СОК с  $R = 1/2$ ,  $q = 256$ ,  $d = 17$ ,  $n = 32000$  и предложенного недвоичного расширенного кода Хэмминга с длиной  $N_2 = 128$ . Из этих результатов следует, что с помощью предложенных методов каскадирования можно уменьшить вероятность ошибки декодирования на 5 и более порядков по сравнению с исходным  $q$ МПД. При этом из-за добавления декодера недвоичного расширенного кода Хэмминга сложность декодирования увеличивается не более чем на 35 % по сравнению с исходным  $q$ МПД.

Второй метод основан на использовании каскадного кода, состоящего из внутреннего  $q$ СОК и внешнего  $q$ СОК [20]. Данные коды образуют обычный код-произведение. При декодировании данного каскадного кода сначала выполняется декодирование внутреннего  $q$ СОК с помощью обычного  $q$ МПД, после чего в соответствии со сформулированным правилом работы недвоичного порогового элемента выполняется декодирование внешнего  $q$ СОК. Пример характеристик данного метода каскадирования представлен на рисунке 6 кривой 11, которая

отражает эффективность работы декодера каскадного кода, состоящего из внутреннего  $q$ СОК с  $d = 5$ ,  $R = 1/2$  и внешнего  $q$ СОК с  $d = 7$ ,  $R = 19/20$  при работе с однобайтовыми символами. При этом для уменьшения вычислительной сложности  $q$ МПД внешнего кода работал без учета дополнительной информации от декодера внутреннего кода. Заметим, что предложенный метод декодирования способен эффективно работать даже при 27,5 % байтовых ошибок в  $q$ СК, что недостижимо для других практически реализуемых методов коррекции ошибок в символьных данных.

В качестве важнейшего на текущий момент прикладного результата, который имеет серьезную идеологическую поддержку со стороны оптимизационной теории кодирования, можно указать на недавнее достижение символьными МПД с кодовой скоростью  $R = 1/2$  особо высокой помехоустойчивости в канале  $q$ СК при вероятности ошибки  $P_0 = 0,3$ , что иллюстрируется на рисунке 6 графиком 12.

Дополнительно следует отметить, что сложность реализации  $q$ МПД не зависит от размера используемых символов, что позволяет создавать декодеры многопорогового типа (в том числе и каскадные), эффективно исправляющие ошибки даже в многобайтовых символах (например, в четырехбайтовых символах и более), для которых создание декодеров других типов представляется очень затруднительным. Все это позволяет считать, что в дальнейшем  $q$ МПД смогут заменить коды РС в самых разных системах передачи и хранения данных, обеспечивая работу таких систем в значительно более сложных условиях, чем возможно в настоящее время.

### Характеристики МПД в каналах со стираниями

Интерес для техники связи также представляют каналы со стираниями, использование которых позволяет существенно упростить процесс декодирования по сравнению со случаем исправления ошибок. Для такого канала существуют версии МПД алгоритмов [2, 3], которые обеспечивают восстановление стираний с эффективностью, близкой к эффективности оптимального декодера, и сохраняющих при этом минимально возможную линейную сложность реализации.

Помимо МПД на сегодняшний день существует ряд других кодов, для которых предложены эффективные алгоритмы восстановления стираний. К ним можно отнести предложенные в последние десятилетия турбо коды, низкоплотные (LDPC) коды, коды накопления-повто-

рения (RA) [21], коды накопления-повторения-накопления (ARA) [22], полярные коды [23] и семейство фонтанных кодов [24], являющихся потоковыми кодами: коды торнадо, на основе которых были созданы фонтанные коды, онлайн коды, раптор коды, коды на основе преобразования Лаби (LT). Для них известны итеративные алгоритмы декодирования, в пределах способные достичь пропускной способности канала. Однако для некоторых из этих кодов даже спустя несколько лет с момента их открытия в доступной литературе отсутствуют понятные инженерам и ученым графики зависимости вероятности невосстановления стирания от вероятности стирания в канале, а даны лишь предельные теоретические характеристики, что усложняет оценку перспектив их применения в реальной аппаратуре передачи и хранения данных [25]. Следует также учитывать, что перечисленные коды часто малоэффективны в каналах, где помимо стираний встречаются ошибочные приемы символов.

Далее рассмотрим характеристики, обеспечиваемые МПД и лучшими известными методами в двоичном канале с независимыми стираниями. Эти характеристики представлены на рисунке 7, на котором показаны зависимости частоты невосстановления стирания после декодирования от вероятности стирания в канале  $P_e$ . Отметим, что на рисунке кодовая скорость всех кодов равна  $1/2$ .

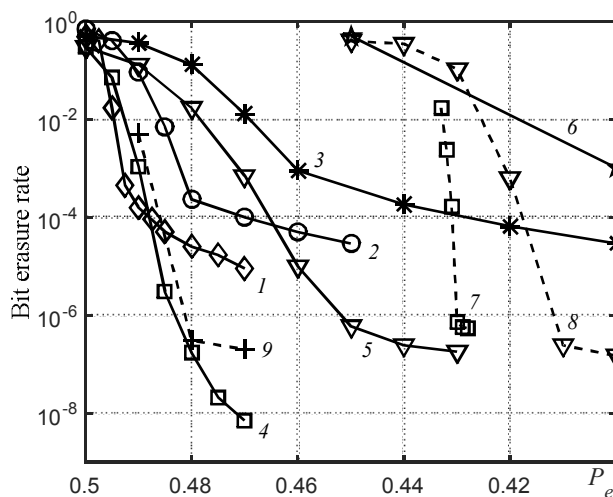


Рисунок 7 – Характеристики методов восстановления стираний для кодов с  $R=1/2$

Кривые 1, 2 и 3 отражают эффективность LDPC кодов длиной 524288, 65536 и 8192 битов соответственно при выполнении 126 итераций декодирования (аналогичные характеристики обеспечивают и нерегулярные RA коды при выполнении 50 итераций декодирования); кривыми 4 и 5 показаны характеристики ARA кодов длиной 65536 и 8192 битов при использовании сов-

местно с ними кода с контролем четности во внешнем каскаде; кривой 6 показаны характеристики декодера LT кода длиной 2000 битов. Отметим, что применение очень длинных IRA и LDPC кодов (длина 524288 битов) позволило получить вероятность невосстановления бита порядка  $10^{-4}$  при вероятности стирания 0,485, что является очень серьезным результатом. Однако практическое применение таких длинных кодов достаточно проблематично. Более короткие коды длиной 8192 бита обеспечивают такую же вероятность невосстановления бита при вероятности стирания в канале около 0,42..0,43. Кривыми 7 и 8 на этом же рисунке показаны характеристики МПД для сверточных и блочных кодов длиной около 32000 битов с кодовой скоростью  $4/8$  с параллельным каскадированием при выполнении 20 итераций декодирования. Отметим, что МПД лишь немного уступает по восстанавливающей способности лучшим известным кодам. Но при этом его вычислительная сложность оказывается в сотни и даже более раз меньше сложности алгоритмов декодирования рассмотренных кодов. Дополнительно отметим, что при увеличении длины кодового ограничения используемого сверточного кода до 200000 бит, оптимизации его структуры и увеличении числа итераций декодирования до 90 удается существенно улучшить характеристики МПД, что иллюстрируется кривой 9 на рисунке 7. Данный МПД обеспечивает сопоставимую с лучшими известными кодами эффективность при многократно меньшей вычислительной сложности.

Отметим, что для повышения эффективности МПД в каналах со стираниями можно организовать каскадирование СОК с кодами с контролем четности (ККЧ) [26]. Результаты моделирования показывают, что использование такого внешнего кода позволяет на 3 и более десятичных порядков уменьшить вероятность невосстановления стирания в области субоптимальной работы МПД. В частности, при использовании ККЧ с СОК, характеристики которого были показаны на рисунке 7 кривой 9, можно обеспечить вероятность невосстановления стирания порядка  $10^{-12}$  при вероятности стирания в канале 0,48. При этом характеристики будут даже несколько лучше характеристик известных методов.

## Выводы

В работе представлены основные результаты разработки простых для реализации и эффективных методов декодирования помехоустойчивых кодов, которые могут быть использованы в телекоммуникационных системах для повышения достоверности передаваемых данных, а также в

аппаратуре систем хранения сверхбольших объемов данных для повышения надежности их хранения. Основой разработанных методов коррекции ошибок являлись многопороговые алгоритмы декодирования самоортогональных кодов, которые, как показывают представленные результаты моделирования, в настоящее время являются одними из лучших по соотношению эффективности и сложности реализации.

Большой объем научно-методических и учебно-демонстрационных материалов по МПД алгоритмам представлен на специализированных двуязычных веб-сайтах [4]. Представленные в работе результаты получены при поддержке РФФИ, РГРТУ, ИКИ РАН.

#### Библиографический список

1. **Зубарев Ю. Б., Овечкин Г. В.** Помехоустойчивое кодирование в цифровых системах передачи данных // *Электросвязь*. М., 2008. № 12. С. 2-11.
2. **Zolotarev V. V., Zubarev Y. B., Ovechkin G. V.** Optimization Coding Theory and Multithreshold Algorithms. Geneva, ITU, 2015. 159 p.
3. **Золотарев В. В., Зубарев Ю. Б., Овечкин Г. В.** Многопороговые декодеры и оптимизационная теория кодирования; под ред. академика РАН В.К. Левина. М.: Горячая линия-Телеком, 2012. 238 с.
4. Ресурсы [www.mtdbest.iki.rssi.ru](http://www.mtdbest.iki.rssi.ru) и [www.mtdbest.ru](http://www.mtdbest.ru).
5. **Мессин Дж.** Пороговое декодирование / пер. с англ.; под ред. Э.Л. Блоха. М.: Мир, 1966.
6. **Золотарев В. В., Овечкин Г. В.** Помехоустойчивое кодирование. Методы и алгоритмы. Справочник. М.: Горячая линия-Телеком, 2004. 124 с.
7. **Давыдов А. А., Золотарев В. В., Самойленко С. И., Третьякова Е. И.** Вычислительные сети. М.: Наука, 1981.
8. **Овечкин Г. В., Овечкин П. В.** Оптимизация структуры двоичных самоортогональных кодов для схем параллельного кодирования // *Труды Научно-исследовательского института радио*. М., 2009. № 2. С. 34-38.
9. **Ovechkin G., Zolotarev V., Ovechkin P., Sati-baldina D., Tashatov N.** The Performance of Concatenated Schemes Based on Non-binary Multithreshold Decoders // *Advances in Systems Science*. Springer International Publishing, 2014. Vol. 240. P. 251-259.
10. **Овечкин Г. В.** Методы улучшения эффективности многопорогового декодера самоортогональных кодов // *Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета*. 2004. № 14. С. 54-58.
11. **Овечкин Г. В., Овечкин П. В.** Использование двоичного многопорогового декодера в каскадных схемах коррекции ошибок // *Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета*. 2009. № 30. С. 7-12.
12. Патент №44216 РФ. Высокоскоростное устройство для многопорогового декодирования линейных кодов / Золотарев В. В. (ИКИ РАН). Оpubл. 2004.
13. **Золотарев В. В., Овечкин Г. В., Чулков И. В., Назиров Р. Р.** Алгоритмы МПД // *Российский космос*. М., 2009. № 1. С. 60-63.
14. **Zolotarev V. V., Ovechkin G. V., Shevlyakov D. A.** The Performance of Multithreshold Decoder over Fading Channels // 2015 International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON). Омск, 2015.
15. **Овечкин Г. В., Шевляков Д. А.** Применение многопорогового декодирования для коррекции ошибок в беспроводных каналах связи // *Цифровая обработка сигналов*. М., 2015. № 4. С. 14-19.
16. **Zolotarev V., Ovechkin G., Issainova A., Saty-baldina D., Tashatov N.** Effective Multithreshold Decoding Algorithms for Wireless Communication Channels // 2016 IEEE 10th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT). Baku, Azerbaijan. 2016. P. 539-543.
17. **Золотарев В. В., Кузнецов Н. А., Овечкин Г. В., Овечкин П. В.** Недвоичные многопороговые декодеры и другие методы коррекции ошибок в символьной информации // *Радиотехника*. М., 2010. № 6. Вып. 141. С. 4-9.
18. **Золотарев В. В., Овечкин Г. В.** Эффективное многопороговое декодирование двоичных кодов // *Радиотехника и электроника*. М., 2010. Т. 55. № 3. С. 324-329.
19. **Zhang F., Pfister H.** List-Message Passing Achieves Capacity on the q-ary Symmetric Channel for Large q // *In Proc. IEEE Global Telecom. Conf. Washington*, 2007. P. 283-287.
20. **Овечкин Г. В.** Метод декодирования каскадных помехоустойчивых кодов с применением многопороговых алгоритмов // *Труды Научно-исследовательского института радио*. М., 2011. № 1. С. 55-61.
21. **Pfister H., Sason I., Urbanke R.** Capacity-achieving ensembles for the binary erasure channel with bounded complexity // *IEEE Trans. Inform. Theory*. 2005. Vol. 51. No. 7. P. 2352-2379.
22. **Pfister H., Sason I.** Accumulate-Repeat-Accumulate Codes: Systematic Codes Achieving the Binary Erasure Channel Capacity with Bounded Complexity // *IEEE Transactions on Information Theory*. 2005.
23. **Balatsoukas-Stimming A., Burg A.** Faulty Successive Cancellation Decoding of Polar Codes for the Binary Erasure Channel // 2014 International Symposium on Information Theory and its Applications (ISITA). 2014. P. 448-452.
24. **MacKay D. J. C.** Fountain Codes // *Communications*. 2005. Vol. 152. No. 6. P. 1062-1068.
25. **Золотарев В. В., Овечкин Г. В., Овечкин П. В.** О сопоставлении новых методов помехоустойчивого кодирования // *Доклады 18-й Международной конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применение»*. М., 2016. Т. 1. С. 59-64.
26. **Золотарев В. В., Овечкин Г. В., Шевляков Д. А.** Улучшение эффективности многопороговых декодеров в каналах связи со стираниями // *Фундаментальные исследования*. 2015. № 8 (Ч. 3). С. 46-49.



UDC 681.391:519.72

## EFFECTIVE MULTITHRESHOLD DECODERS FOR SELF-ORTHOGONAL CODES

**V. V. Zolotarev**, PhD (technical sciences), lead researcher of SRI RAS, Moscow; zolotasd@yandex.ru

**G. V. Ovechkin**, PhD (technical sciences), professor of RSREU, Ryazan; g\_ovechkin@mail.ru

**P. V. Ovechkin**, PhD (technical sciences), assistant professor of RSREU, Ryazan; pavel\_ov@mail.ru

*Results of long-term researches in the field of multithreshold decoding (MTDs) of self-orthogonal codes development are presented. Bases of multithreshold decoding are stated, possibilities of MTDs implementation on modern element base are shown. The performance comparison of MTDs and concatenated methods of error correction based on them with decoders of the best error-correction codes over the binary Gaussian channel, the  $q$ -ary symmetric channel and the erasure channel is fulfilled. It is shown the MTDs provide efficiency comparable to other error-correction methods at significantly smaller implementation complexity.*

*Key words: communication system, error-correction coding, self-orthogonal codes, multithreshold decoder, concatenated codes, decoder complexity, binary Gaussian channel,  $q$ -ary symmetric channel, erasure channel.*

**DOI:** 10.21667/1995-4565-2016-60-2-113-122

### References

1. **Zubarev Y. B., Ovechkin G. V.** Pomekhoustoichivoe kodirovanie v tsifrovyykh sistemakh peredachi dannykh (Error-correcting coding in digital communication systems), *Elektrosvyaz'*, Moscow, 2008, no. 12, pp. 2-11. (in Russian)
2. **Zolotarev V. V., Zubarev Y. B., Ovechkin G. V.** Optimization Coding Theory and Multithreshold Algorithms. Geneva, ITU, 2015, 159 p.
3. **Zolotarev V. V., Zubarev Y. B., Ovechkin G. V.** Mnogoporogovye dekodery i optimizatsionnaya teoriya kodirovaniya (Multithreshold decoding and optimizing coding theory), Moscow: Goryachaya liniya – Telekom, 2012, 239 p. (in Russian)
4. Web sites [www.mtdbest.ru](http://www.mtdbest.ru) and [www.mtdbest.iki.rssi.ru](http://www.mtdbest.iki.rssi.ru).
5. **Massey J.** **Threshold decoding**, M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1963.
6. **Zolotarev V. V., Ovechkin G. V.** Pomekhoustoichivoe kodirovanie. Metody i algoritmy. Spravochnik (Error-correction coding. Methods and algorithms. handbook), Moscow: Goryachaya liniya – Telekom, 2004, 124 p. (in Russian)
7. **Davydov A. A., Zolotarev V. V., Samoilenko S. I., Tret'yakova E. I.** Vychislitel'nye seti (Computing nets). Moscow, Nauka, 1981. (in Russian)
8. **Ovechkin G. V., Ovechkin P. V.** Optimizatsiya struktury nedvoichnykh samoortogonal'nykh kodov dlya skhem paralelnogo kodirovaniya (Optimization of structure of non-binary self-orthogonal codes for parallel encoding schemes) Trudy nauchno-issledovatel'skogo instituta radio, Moscow, 2009, no. 2, pp. 34-38. (in Russian)
9. **Ovechkin G., Zolotarev V., Ovechkin P., Sati-baldina D., Tashatov N.** The Performance of Concatenated Schemes Based on Non-binary Multithreshold Decoders, *Advances in Systems Science*. Springer International Publishing, 2014, vol. 240, pp. 251-259.
10. **Ovechkin G. V.** Metody uluchsheniya effektivnosti mnogoporogovogo dekodera samoortogonal'nykh kodov (Methods for improving performance of multithreshold decoder of self-orthogonal codes), *Vestnik Ryazanskoi gosudarstvennoi radiotekhnicheskoi akademii*, Ryazan, 2004, issue 14, pp. 54-58. (in Russian)
11. **Ovechkin G. V., Ovechkin P. V.** Ispol'zovanie nedvoichnogo mnogoporogovogo dekodera v kaskadnykh skhemakh korrektsii oshibok (Application of non-binary multithreshold decoder in concatenation codes), *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2009, no. 29, pp. 7-12. (in Russian)
12. **Patent №44216 RF.** Vysokoskorostnoe ustroystvo dlya mnogoporogovogo dekodirovaniya lineinykh kodov (High throughput unit for multithreshold decoding of linear codes) / Zolotarev V. V. (IKI RAN), Opubl. 2004. (in Russian)
13. **Zolotarev V. V., Nazirov R. R., Chulkov I. V., Ovechkin G. V.**, Algoritmy MPD (MTD algorithms), *Rossiiskii kosmos*, Moscow, 2009, no. 1, pp. 60-63. (in Russian)
14. **Zolotarev V. V., Ovechkin G. V., Shevlyakov D. A.** The Performance of Multithreshold Decoder over Fading Channels, 2015 International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON), Omsk, 2015.
15. **Ovechkin G. V., Shevlyakov D. A.** Primenenie mnogoporogovogo dekodirovaniya dlya korrektsii oshibok v besprovodnykh kanalakh svyazi (A using of multithreshold decoding for error correction in wireless channels), *Tsifrovaya obrabotka signalov*, Moscow, 2015, no. 4, pp. 14-19. (in Russian)
16. **Zolotarev V., Ovechkin G., Issainova A., Saty-baldina D., Tashatov N.** Effective Multithreshold Decoding Algorithms for Wireless Communication Channels, 2016 IEEE 10th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT), Baku, Azerbaijan, 2016, pp. 539-543.
17. **Zolotarev V. V., Kuznetsov N. A., Ovechkin G. V., Ovechkin P. V.** Nedvoichnye mnogoporogovye dekodery i drugie metody korrektsii oshibok v simvol'noi informatsii (Nonbinary multithreshold decoders and other error correction

methods in symbolic information), Radiotekhnika, Moscow, 2010, no. 6, issue 141, pp. 4-9. (in Russian)

18. **Zolotarev V. V., Ovechkin G. V.** Efficient Multithreshold Decoding of Nonbinary Codes, *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2010, vol. 55, no. 3, pp. 302–306.

19. **Zhang F., Pfister H.** List-Message Passing Achieves Capacity on the  $q$ -ary Symmetric Channel for Large  $q$ , In *Proc. IEEE Global Telecom. Conf. Washington*, 2007, pp. 283-287.

20. **Ovechkin G. V.** Metod dekodirovaniya kaskadnykh pomekhoustoichivyykh kodov s primeneniem mnogoporogovykh algoritmov (Method for decoding of concatenated error-correction codes with using multithreshold algorithms), *Trudy nauchno-issledovatel'skogo instituta radio*, Moscow, 2011, no. 1, pp. 55–61. (in Russian)

21. **Pfister H., Sason I., Urbanke R.** Capacity-achieving ensembles for the binary erasure channel with bounded complexity, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2005, vol. 51, no. 7, pp. 2352-2379.

22. **Pfister H., Sason I.** Accumulate-Repeat-Accumulate Codes: Systematic Codes Achieving the Binary

Erasure Channel Capacity with Bounded Complexity, *IEEE Transactions on Information Theory*, 2005.

23. **Balatsoukas-Stimming A., Burg A.** Faulty Successive Cancellation Decoding of Polar Codes for the Binary Erasure Channel, 2014 International Symposium on Information Theory and its Applications (ISITA), 2014, pp. 448-452.

24. **MacKay D. J. C.** Fountain Codes, *Communications*. 2005, vol. 152, no. 6, pp. 1062-1068.

25. **Zolotarev V. V., Ovechkin G. V., Ovechkin P. V.** O sopostavlenii novykh metodov pomekhoustoichivogo kodirovaniya (About comparison of new methods for error correction), *Proceeding of 18-th International Conference «Tsifrovaya obrabotka signalov ee prilozheniya» («Digital signal processing and its application»)*, Moscow, 2016, vol. 1, pp. 59-64. (in Russian)

26. **Zolotarev V. V., Ovechkin G. V., Shevlyakov D. A.** Uluchshenie effektivnosti mnogoporogovykh dekoderov v kanalakh svyazi so stiraniami (Improving performance of multithreshold decoders in erasure channels), *Fundamental'nye issledovaniya*, Moscow, 2015, no. 8 (part 3), pp. 486-490.