

В.В. Золотарёв, Г.В. Овечкин, П.В. Овечкин

**МНОГОПороГОВОЕ ДЕКОДИРОВАНИЕ ДЛЯ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ**

**Введение.** При передаче цифровых данных по каналам с шумами всегда существует вероятность того, что принятые данные будут содержать ошибки. Наиболее эффективным способом исправления ошибок является применение методов помехоустойчивого кодирования. На сегодняшний день теории кодирования известно множество кодов и методов их декодирования, различающихся корректирующей способностью, сложностью реализации и рядом других параметров [1]. В статье проводится обзор лучших современных методов коррекции ошибок, позволяющих работать вблизи пропускной способности канала, формулируются цели исследования, описываются разработанные в ходе исследования схемы кодирования/декодирования.

**Характеристики методов коррекции ошибок.** На рис.1 представлены зависимости вероятности ошибки на бит  $P_b$  на выходе декодера от уровня шума канала  $E_b/N_0$  для различных методов коррекции ошибок. Данные зависимости получены для случая работы в канале с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ) при использовании двоичной фазовой модуляции (ФМ2). Данная модель канала достаточно точно описывает реальные спутниковые и многие другие типы каналов.

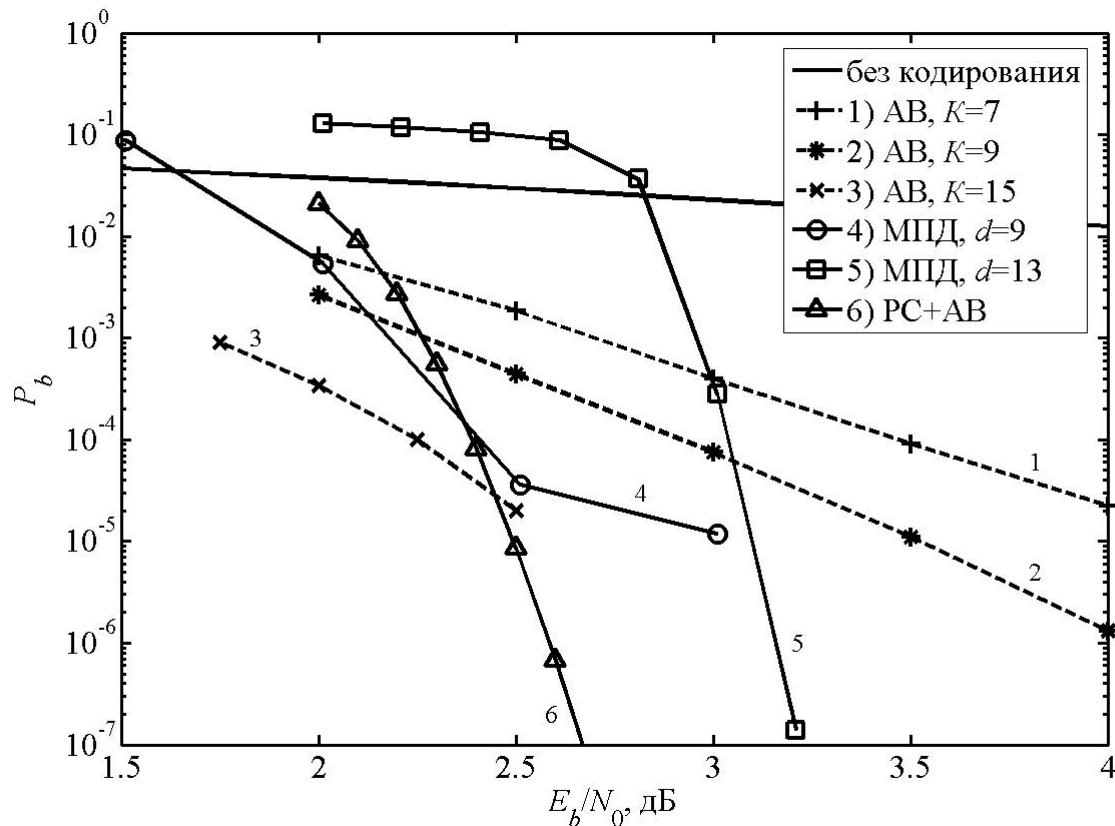


Рис.1. Характеристики методов декодирования в канале с АБГШ

На данном рисунке кривые «АВ,  $K=7$ », «АВ,  $K=9$ » и «АВ,  $K=15$ » отражают эффективность применения классического алгоритма Витерби (АВ) [2] для декодирования сверточных кодов с кодовой скоростью  $R=1/2$  и длиной кодирующего регистра  $K=7, 9$  и  $15$  соответственно. Данный метод является оптимальным, однако его сложность растет экспоненциально с ростом длины  $K$  (сложность порядка  $N_{AB} \approx 3 \cdot 2^K$  операций, эквивалентных сложению), и поэтому на практике декодеры с  $K > 9$  не используются. А поскольку при использовании кодов с  $K \leq 9$  эффективность АВ оказывается невысокой возникает необходимость поиска более простых с точки зрения практической реализации декодеров, обеспечивающих в то же время близкое к оптимальному декодирование даже очень длинных кодов.

Значительно лучшими характеристиками обладают многопороговые декодеры (МПД) [1, 3–6], являющиеся модификацией обычного порогового декодера Месси [7]. МПД в процессе контроля принятых кодовых последовательностей многократно исправляют информационные символы пришедшего из канала сообщения. Эти декодеры обладают важнейшим строго доказанным свойством – сходимостью к решению оптимального декодера при линейной зависимости сложности реализации от длины кода.

Кривая «МПД,  $d=9$ » на рис.1 соответствует работе МПД самоортогонального кода (СОК) [1] с  $R=1/2$  и минимальным кодовым расстоянием  $d=9$ . Возможности МПД для кода с  $R=1/2$  и  $d=13$  представлены на рис.1 кривой «МПД,  $d=13$ ». В обоих случаях длина кода не превосходила  $n=10000$  битов, и при декодировании использовалось до  $I=15$  итераций. Как следует из графиков, МПД для достаточно длинных правильно выбранных кодов оказывается лучше практически реализуемых декодеров Витерби. При этом МПД выполняет только простейшие операции сложения и сравнения небольших целых чисел [1], что обуславливает его крайнюю простоту при всех вариантах программной или аппаратной реализации [8].

В случае программной реализации МПД для декодирования одного информационного бита необходимо выполнить примерно  $N_{МПД} \approx (I+1)(d+2)$  операций, эквивалентных сложению. В данном выражении  $I$  – количество итераций декодирования,  $d$  – кодовое расстояние СОК. Заметим, что в большинстве случаев при незначительной потере в эффективности (около 0,1 дБ) удастся снизить общее число операций до величины  $N_{МПД} \approx 4d+3I$ . Это позволяет МПД быть более чем на порядок проще всех других методов коррекции ошибок с сопоставимой эффективностью.

В случае аппаратной реализации МПД скорость его работы  $V_{МПД}$  определяется лишь скоростью продвижения данных в регистрах сдвига  $V_P$ , т.е.  $V_{МПД} \approx k_0 V_P$ , где  $k_0$  – количество информационных ветвей. В результате МПД при аппаратной реализации оказывается на два и более порядков быстрее сопоставимых по эффективности кодов.

**Каскадные коды.** Важным этапом в развитии теории кодирования является появление каскадных кодов, в основе построения которых лежит идея совместного использования нескольких составляющих кодов. Данный подход позво-

ляет существенно повысить эффективность применения кодирования по сравнению с базовыми некаскадными методами.

Наиболее широкое распространение в реальных системах связи нашла каскадная схема, в которой внешним кодом является код Рида-Соломона (РС), а внутренним – сверточный код, обычно декодируемый с помощью оптимального АВ [1]. Результаты моделирования такого каскадного кода, состоящего из кода РС длиной  $n=255$ , кодовым расстоянием  $d=33$  и сверточного кода с  $K=7$ ,  $R=1/2$  представлены на рис.1 кривой «РС+АВ». Заметим, что данная схема сопоставима с МПД по эффективности при существенно большей сложности реализации и при несколько меньшей общей кодовой скорости.

Дальнейшим развитием каскадных кодов стали турбо коды (Turbo Convolutional Codes – ТСС), образующиеся путем каскадирования двух или более составляющих кодов. Первые турбо коды, предложенные Беру и соавторами в [9], состояли из двух параллельно соединенных через перемежитель сверточных кодов.

На рис.2 представлены характеристики ТСС с кодовой скоростью  $R=1/2$ , конструктивной длиной составляющих рекурсивных систематических сверточных кодов  $K=4$ , Max-Log-MAP алгоритмом декодирования составляющих кодов, 8 итерациями декодирования и перемежителем, рекомендованным консультативным комитетом по космической связи (кривая «ТСС, CCSDS») или псевдослучайным перемежителем (кривая «ТСС, random»). Длина турбо кода в обоих случаях была равна 10000 битам. Как видно из рисунка, последний турбо код способен работать почти в 1 дБ от пропускной способности канала. Недостатками данных кодов являются все же достаточно высокая сложность декодирования и наличие эффекта «насыщения» вероятности ошибки, заключающегося в уменьшении скорости убывания вероятности ошибки декодирования в области меньших шумов канала.

Сложность программной реализации турбо кодов определяется выражением [1]

$$N_{\text{турбо}} = IN_{\text{сост}}M,$$

где  $I$  – число итераций декодирования,  $M$  – число составляющих кодов,  $N_{\text{сост}}$  – сложность декодера составляющих кодов, равная, например для Max-Log-MAP алгоритма декодирования,  $N_{\text{сост}} \approx 15 \cdot 2^{K-1}$ , где  $K$  – конструктивная длина составляющих кодов.

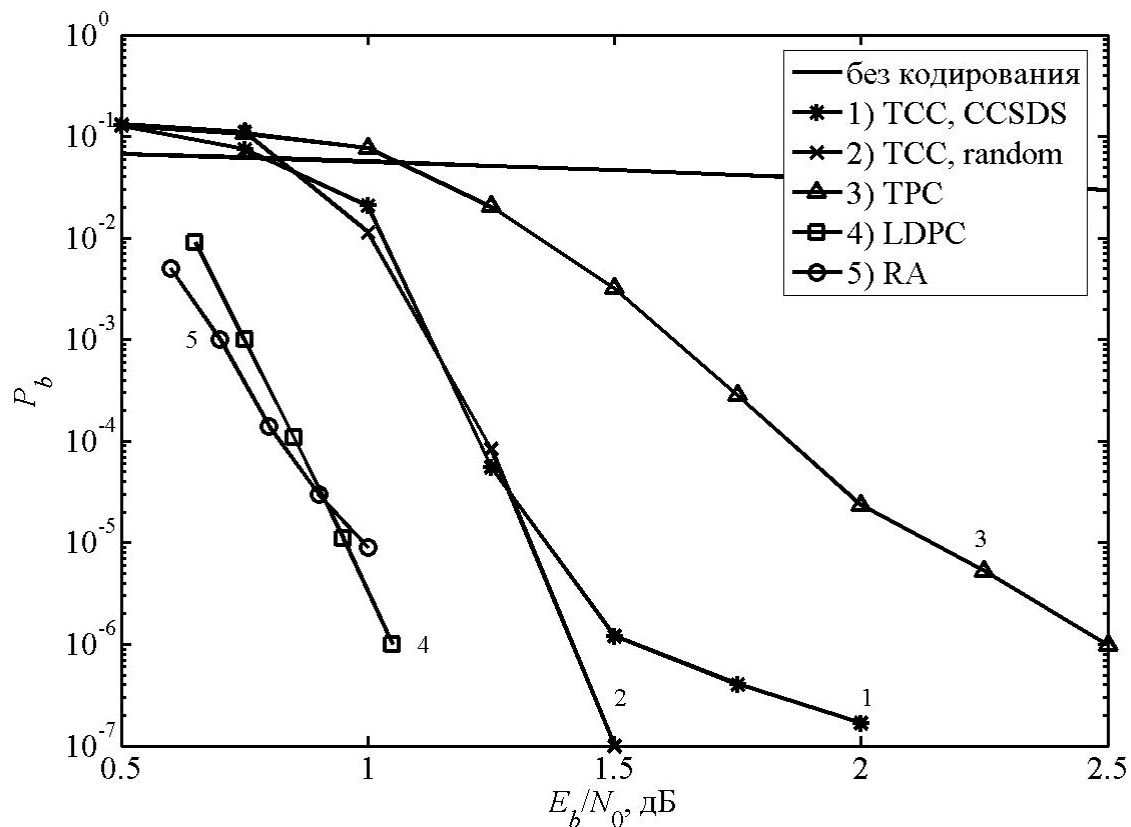


Рис.2. Характеристики турбо подобных методов декодирования в канале с АБГШ

Развитием ТСС стали турбо коды произведения (Turbo Product Codes – TPC) [10, 11], при построении которых используется последовательное каскадирование двух или нескольких линейных блочных кодов, таких как коды с контролем четности, коды Хэмминга, коды БЧХ. Среди них наибольший интерес представляют TPC коды, построенные на основе кодов Хэмминга.

На рис.2 представлены характеристики TPC, построенного на основе трех блочных  $(n, k)$  кодов с параметрами  $(16, 11)$ ,  $(8, 7)$  и  $(32, 26)$  (кривая «TPC»). Для этого TPC  $R=0.489$ , а  $n=4096$  бит. При декодировании данных кодов использовалось до 8 итераций. Заметим, что данные коды обладают немного меньшей сложностью декодирования, чем турбо коды и у них практически отсутствует область «насыщения» вероятности ошибки. Но TPC коды показывают хорошие характеристики только при высоких кодовых скоростях.

Прекрасные характеристики, получаемые при итеративном декодировании турбо кодов, стимулировали активные исследования по применению данного метода к декодированию других кодов. В результате оказалось возможным получить еще лучшие характеристики при декодировании низкоплотностных (Low Density Parity Check – LDPC) кодов [12, 13], предложенных Галлагером еще в 1962 г. Для декодирования LDPC кодов обычно используется разновидность итеративного декодирования, называемая алгоритмом распространения надежности (Belief Propagation), работающего с графо кода.

На рис.2 представлены характеристики нерегулярных низкоплотностных кодов с  $R=1/2$  и  $n=10000$  битов (кривая «LDPC»). Как следует из данного рисунка, эффективность LDPC кодов оказывается лучше эффективности турбо

кодов, что особенно заметно при больших длинах кодов и при малых вероятностях ошибки декодирования. При этом сложность практической реализации LDPC кодов, определяемая как  $N_{LDPC}=4Is$  (здесь  $I$  – число итераций декодирования,  $s$  – средний вес столбцов проверочной матрицы), оказывается существенно ниже сложности турбо кодов, но почти на порядок больше сложности МПД. К одному из основных недостатков LDPC кодов, возникающему из-за специфической структуры проверочной матрицы, следует отнести квадратичную зависимость сложности кодирования от длины кода, хотя существуют подходы, позволяющие при тщательном предварительном проектировании и некоторых потерях в эффективности снизить сложность кодирования до линейной.

Коды повторения-накопления (Repeat-Accumulate – RA) [14] сочетают в себе достоинства турбо кодов (линейная сложность кодирования) и низкоплотностных кодов (линейная сложность декодирования). Данные коды являются разновидностью кодов с последовательным каскадированием. Кодер состоит из повторителя, перемежителя и аккумулятора. В роли последнего обычно выступает рекурсивный сверточный кодер с кодовой скоростью 1.

Кривая «RA» на рис.2 отражает характеристики нерегулярных RA кодов с  $n=10000$  битов и  $R=1/2$ . Видно, что эффективность RA кодов оказывается лучше эффективности турбо кодов и сопоставима с эффективностью LDPC кодов.

**Постановка задачи.** Представленный обзор методов помехоустойчивого кодирования показывает, что в настоящее время существует несколько методов коррекции ошибок, позволяющих работать вблизи пропускной способности канала. Однако сложность их практической реализации часто не позволяет использовать данные методы в высокоскоростных системах связи. Кроме того, в связи с постоянным ростом скоростей обмена информацией требования более простой реализации декодеров будут все актуальнее.

В результате возникает задача разработки методов декодирования помехоустойчивых кодов, обеспечивающих высокую достоверность передачи данных при высоком уровне шума в канале и характеризующих предельно малой сложностью программной и аппаратной реализации.

Среди современных методов коррекции ошибок наиболее простые, однородные и быстрые операции выполняют многопороговые декодеры. Кроме этого МПД обладают очень высокой корректирующей способностью, недостижимой другими некаскадными методами. Поэтому в данной работе основные усилия направлены на поиск способов улучшения характеристик МПД.

**Каскадные коды, декодируемые с использованием многопорогового декодера.** Высокие характеристики, показываемые обычным некаскадным МПД, способствуют его широкому применению в составе различных кодовых конструкций, поскольку эффективность последних непосредственно связана с эффективностью их составных элементов.

Особое место среди кодовых схем на базе МПД занимает каскадирование с кодами контроля по четности (ККЧ) [4] использование которых также позволяет повысить эффективность применения кодирования. Особенность данной схемы заключается в том, что такое каскадирование практически не требует дополнительных затрат на оборудование (в схему кодирования требуется доба-

вить лишь один сумматор по модулю 2), тогда как использование в каскадном коде, например, кодов Рида-Соломона несравненно труднее.

На рис.3 показаны результаты моделирования каскадной схемы, состоящей из СОК с  $R=1/2$  и  $d=9$ , декодируемого с помощью МПД, и ККЧ длиной 50 битов (кривая «МПД9+ККЧ»). Заметим, что использование простейшего ККЧ совместно с СОК позволяет получить дополнительный энергетический выигрыш около 1 дБ (по сравнению с кривой «МПД9») при вероятности ошибки на выходе декодера  $P_b=10^{-5}$ . Также отметим, что каскадный код, состоящий из кода Рида-Соломона (255, 223, 33) и декодера Витерби для кода с  $R=1/2$  и  $K=7$  (кривая «РС+АВ»), даже при меньшей общей кодовой скорости уступает каскадной схеме на базе МПД при  $P_b > 10^{-6}$ . Кривая «МПД6+ККЧ» на данном рисунке отражает эффективность каскадной схемы, состоящей из длинного СОК с  $R=1/2$ ,  $d=6$  и ККЧ длиной  $n=20$ . При декодировании данного кода использовалось до 50 итераций. К сожалению, рассмотренный способ каскадирования позволяет улучшить характеристики МПД только в области его эффективной работы.

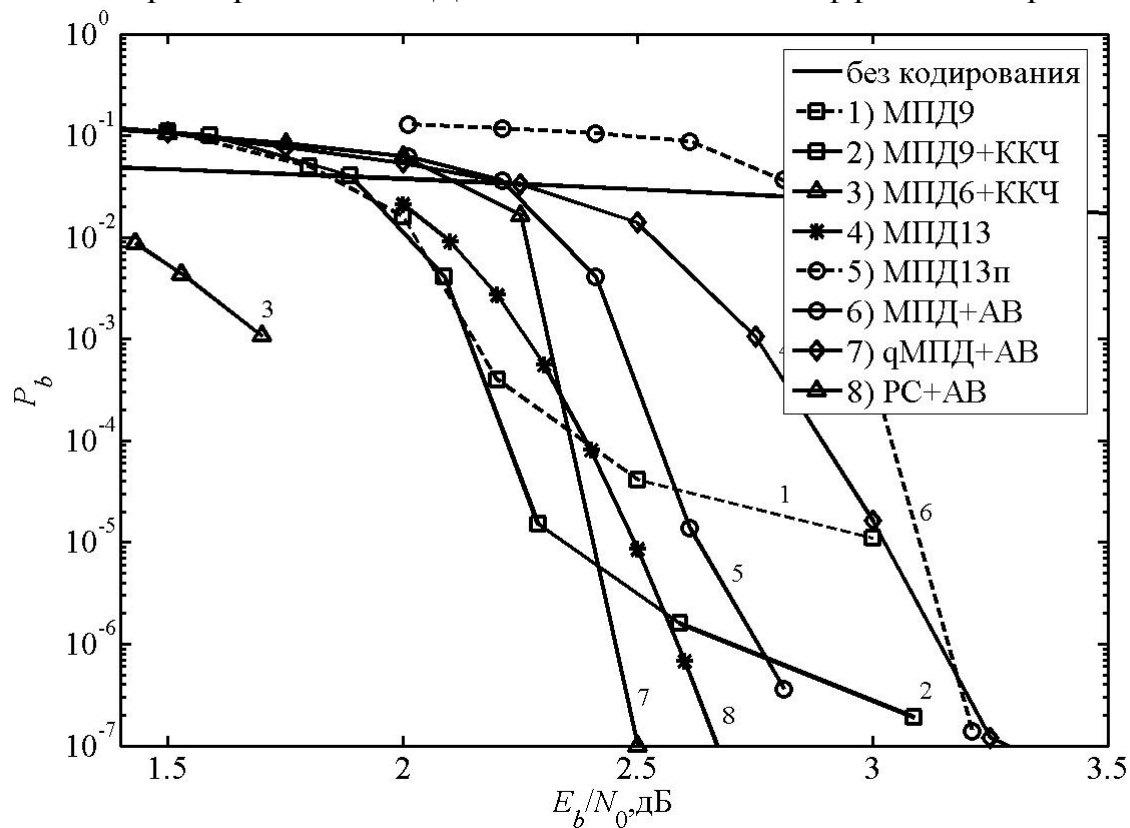


Рис.3. Характеристики каскадных схем на базе МПД в канале с АБГШ

Для приближения границы эффективной работы МПД к пропускной способности канала возможно его применение в схемах параллельного кодирования [5], в основе построения которых лежит выделение в некотором базовом СОК, например, с  $R=1/2$ , двух составляющих СОК с большими кодовыми скоростями. В такой схеме на первых итерациях декодируется первый составляющий СОК, после чего в процесс декодирования включается второй СОК. Заметим, что в результате на последних итерациях МПД просто декодирует базовый СОК с  $R=1/2$ , в то время как в обычных каскадных кодах кодовая скорость

внешнего кода близка к единице. Данное свойство обеспечивает существенное преимущество МПД перед другими каскадными конструкциями.

Для примера кривой «МПД13п» на рис.3 представлены результаты моделирования схемы с параллельным кодированием в канале с АБГШ для СОК с  $R=1/2$ ,  $d=13$ . Как следует из анализа представленных графиков, применение параллельного кодирования позволяет приблизить границу эффективной работы МПД к пропускной способности канала примерно на 0,5 дБ по сравнению с обычным СОК с таким же кодовым расстоянием (кривая «МПД13»).

Сложность МПД при параллельном кодировании оказывается даже меньше сложности обычного МПД, поскольку в данном случае на первых итерациях декодирования некоторые элементы синдромного регистра просто не участвуют в процессе вычисления суммы на пороговом элементе.

Еще одной каскадной схемой на основе МПД является схема, внешним кодом в которой является СОК (декодируется с помощью МПД), а внутренним – короткий сверточный код (декодируется с помощью алгоритма Витерби) [16].

На рис.3 кривой «МПД+АВ» представлены результаты моделирования схемы, состоящей из СОК с  $R=8/10$  и  $d=7$ , декодируемого с помощью МПД, и сверточного кода с  $R=1/2$ ,  $K=7$ , декодируемого с помощью алгоритма Витерби. Кривой «qМПД+АВ» на этом же рисунке показаны характеристики каскадного кодека, состоящего из недвоичного СОК для  $Q=256$ , декодируемого с помощью недвоичного МПД (qМПД) [1], и сверточного кода, декодируемого алгоритмом Витерби. Как следует из анализа представленных графиков переход к недвоичным кодам позволил увеличить энергетическую эффективность кодирования примерно на 0,8 дБ. Это объясняется тем, что ошибки на выходе декодера Витерби обычно группируются в пакеты, каждый из которых, в случае использования  $q$ -ичных кодов, искажает всего один или два  $q$ -ичных символа.

Заметим, что хотя каждая из рассмотренных схем на базе МПД позволяет незначительно повысить эффективность МПД, совместное применение данных подходов приводит к существенному улучшению его характеристик.

Приведенные для МПД результаты относились только к двоичным кодам и системам с двоичной фазовой модуляцией. Но данный метод уже реализован и для недвоичных кодов, обеспечивая характеристики близкие или несколько более высокие, чем у кодов Рида–Соломона. Кроме того, МПД показывает высокие характеристики в каналах со стираниями [16] и в системах с многопозиционной модуляцией [17], что делает его универсальным средством простого достижения высокого уровня помехозащищенности сообщений в системах широкого спектра применения. Дополнительную информацию об алгоритмах класса МПД можно найти на тематическом веб-сайте ИКИ РАН [www.mtdbest.iki.rssi.ru](http://www.mtdbest.iki.rssi.ru).

**Аппаратная реализация МПД.** На рис.4 представлены последние достижения в области высокоскоростных декодеров типа МПД на современных ПЛИС для  $R=1/2$ . Кривая «МПД Xilinx» относится к разработке сверточного МПД на ПЛИС Xilinx на скорости порядка 100 Мбит/с, который может быть легко реализован на скоростях до 480 Мбит/с. Он существенно более эффекти-

вен по сравнению с АВ (кривая «АВ, K=7») и достаточно мало отличается от возможностей каскадной схемы АВ+РС, но оказывается значительно проще.

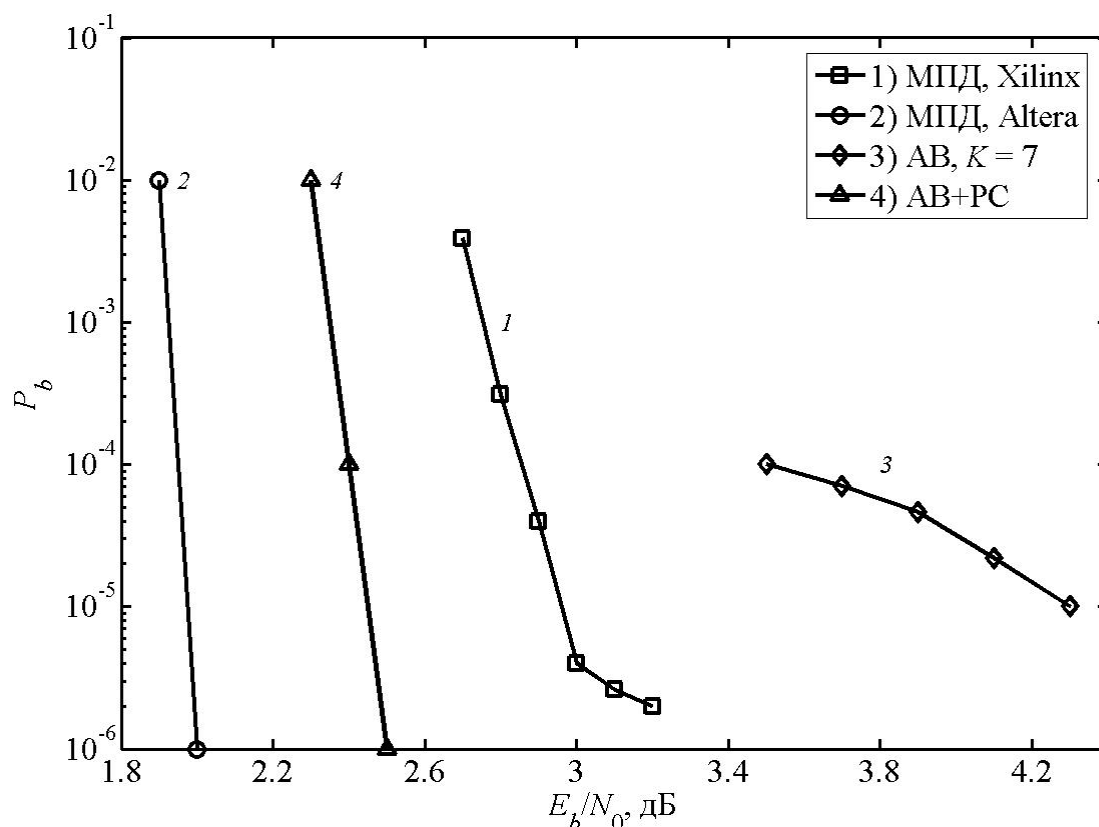


Рис. 4. Характеристики МПД на ПЛИС в канале с АБГШ

График «МПД Altera» приведен для декодера МПД с 40 итерациями декодирования, построенного на ПЛИС Altera. Подчеркнем важнейшее свойство такого аппаратного МПД: эта обычная базовая схема декодера этого типа, т.е. она даже не относится к каскадным конструкциям, но оказывается существенно более эффективной по уровню шума, при котором она работает. Столь высокая его эффективность обусловлена новыми реальными достижениями в поиске кодов с низким уровнем размножения ошибок при их коррекции, что в свою очередь и позволило перейти к большему числу итераций декодирования. Можно утверждать, что такая схема, безусловно, относится к лучшим некаскадным процедурам коррекции ошибок, известным в теории и технике кодирования. Данная схема реализована на ПЛИС Altera при информационной скорости более 200 Мбит/с.

**Заключение.** Последнее десятилетие создало условия для достижения в реальной каналообразующей аппаратуре систем связи уровня энергетики, весьма близкого к теоретическим пределам для каналов космической и спутниковой связи. Высокие характеристики в настоящее время могут обеспечить всего несколько методов коррекции ошибок. Но учет проблемы сложности при сопоставимой корректирующей способности показывает, что в этом случае алгоритмы на базе МПД сохраняют близость по своей сложности реализации к простейшему декодеру порогового типа и поэтому в большинстве случаев применения кодирования являются наиболее предпочтительными методами декодирования в приемлемых по стоимости высокоскоростных системах связи.



### Библиографический список

1. Золотарев В.В., Овечкин Г.В. Помехоустойчивое кодирование. Методы и алгоритмы. Справочник. М.: Горячая линия – Телеком, 2004. 126 с.
2. Витерби А. Границы ошибок для сверточных кодов и асимптотически оптимальный алгоритм декодирования // Некоторые вопросы теории кодирования. М.: Мир, 1970. С.142–165.
3. Золотарев В.В., Овечкин Г.В. Многопороговые декодеры для каналов с предельно высоким уровнем шума // Телекоммуникации. 2005. №9. С.29–34.
4. Золотарев В.В., Овечкин Г.В. Использование многопорогового декодера в каскадных схемах // Вестник РГРТА. 2003. Вып.11. С.112–115.
5. Золотарев В.В. Параллельное кодирование в каналах СПД // Вопросы кибернетики. 1986. Вып.120. С.56–58.
6. Веб-сайт [www.mtdbest.iki.rssi.ru](http://www.mtdbest.iki.rssi.ru).
7. Месси Дж. Пороговое декодирование / Пер. с англ.; Под ред. Э.Л. Блоха. М.: Мир, 1966. 208 с.
8. Золотарев В.В., Овечкин Г.В. Сложность реализации эффективных методов декодирования помехоустойчивых кодов // 6-я межд. конф. и выст. DSPA-2006. М.: 2004. Т.1. С.220–221.
9. Berrou C., Glavieux A., Thitimajshima P. Near Shannon Limit Error-Correcting Coding and Decoding: Turbo Codes // Proc. of the Intern. Conf. on Commun. 1993. May. P.1064–1070.
10. Press Release, ANA announces Turbo Product Code Forward Error Correction Technology. 1998.
11. Williams D. Turbo Product Code FEC Contribution // IEEE 802.16.1pc-00/35. 2000.
12. MacKay D.J.C., Neal R.M. Near Shannon limit performance of low density parity check codes // IEEE Electronics Letters. Aug. 1996. V.32. №18. P.1645–1646.
13. Richardson T., Shokrollahi M., Urbanke R. Design of capacity-approaching irregular low-density parity-check codes // IEEE Trans. Inform. Theory. 2001. V.47. P.638–656.
14. Jin H., Khandekar A., McEliece R. Irregular repeat-accumulate codes // Proc. 2nd Int. Symp. on Turbo Codes and Related Topics. 2000, Sept. P.1–8.
15. Золотарев В.В., Овечкин Г.В., Овечкин П.В. Эффективность каскадных схем кодирования на базе многопорогового декодера // Межвуз. сб. науч. тр. «Математическое и программное обеспечение вычислительных систем». Рязань, РГРТА, 2005. С.119–123.
16. Гринченко Н.Н., Золотарев В.В., Овечкин Г.В., Овечкин П.В. Применение многопорогового декодера в каналах со стираниями // труды 61-й науч. сессии, посв. Дню радио. М.: 2006. С. 338–340.
17. Денисова М.А., Овечкин Г.В., Овечкин П.В., Применение многопорогового декодера в системах передачи данных с многопозиционными системами модуляции // Мат. 13-й Межд. науч.-техн. конф. «Проблемы передачи и обработки информации в сетях и системах телекоммуникаций», Рязань: РГРТА, 2004. С. 58–59.