

УДК 621.391:519.72

ХАРАКТЕРИСТИКИ БЛОКОВЫХ РЕАЛИЗАЦИЙ АЛГОРИТМА ВИТЕРБИ

В. В. Золотарев, д.т.н., ведущий научный сотрудник ИКИ РАН; zolotasd@yandex.ru

Г. В. Овечкин, д.т.н., профессор кафедры ВПМ, РГРТУ; g_ovechkin@mail.ru

П. В. Овечкин, к.т.н., доцент кафедры ВПМ, РГРТУ; pavel_ov@mail.ru

Рассматриваются оптимальные методы декодирования помехоустойчивых кодов, позволяющие увеличить достоверность передачи данных по каналам с шумом. Целью работы является решение задачи повышения эффективности декодирования коротких блоковых кодов. В работе предлагается весьма простая модификация алгоритма декодирования квазициклических блоковых кодов, которые строятся на основе коротких сверточных кодов. При этом декодирование осуществляется алгоритмом Витерби, не учитывающим блоковую структуру кода, а как бы декодирующим обычную бесконечную последовательность. Выполнен анализ характеристик предложенного декодера и оценена сложность его реализации. Показано, что с помощью предложенного декодера Витерби для блокового кода можно обеспечить вероятность битовой ошибки, аналогичную вероятности ошибки для соответствующего сверточного кода, при увеличении сложности декодирования всего в 2...3 раза.

Ключевые слова: системы передачи данных, помехоустойчивое кодирование, алгоритм Витерби, сверточные коды, блоковые коды, квазициклический код, циклическая решетка, сложность декодера.

DOI: 10.21667/1995-4565-2017-59-1-30-35

Введение

Фундаментальная научная проблема повышения достоверности передачи цифровых данных по каналам с шумами решается с использованием методов помехоустойчивого кодирования. Среди них лучшими по эффективности являются оптимальные декодеры, которые всегда находят наиболее близкое к принятому сообщению кодовое слово. Оптимальные декодеры при декодировании принятых сообщений осуществляют полный перебор всех возможных вариантов кодовых слов, поэтому их сложность экспоненциально зависит от длины используемого кода. Среди оптимальных алгоритмов декодирования в настоящее время наиболее широкое распространение получил алгоритм декодирования сверточных кодов, предложенный А. Витерби в 1967 г. [1]. Данный алгоритм позволяет изящно выполнить полный перебор всех возможных кодовых слов и выбрать среди них то, которое находится на минимальном расстоянии от принятого сообщения.

Постановка задачи

При создании технических средств с системами помехоустойчивого кодирования на основе декодеров, реализующих алгоритм Витерби (АВ) и другие методы, часто приходится реализовывать процедуры ресинхронизации. Они состоят в

том, что при завершении передачи некоторого блока данных, который следует отправить получателю по каналу связи, в кодер вводится нулевая информационная последовательность, равная по длине размеру памяти кодера. Эта процедура необходима для того, чтобы помехозащищенность последних информационных символов кода не ухудшилась из-за отсутствия необходимых кодовых символов, если передачу кодовых символов блока прекратить в момент поступления в кодер последнего информационного символа в этом блоке. При этом очень неудобно, что дополнительные нулевые информационные символы в конце сообщения конечной длины меняют кодовую скорость исходного сверточного кода. Например, при длине исходного сообщения, равного 100 битам, для кода с кодовой скоростью $R=1/2$ в канал должны уходить не только 200 двоичных кодовых символов, а еще $2(K-1)$ символов, где K – конструктивная длина кода. Поэтому, например, в частном случае при $K=7$ в канал дополнительно уходят 12 кодовых символов. Это значит, что реальная кодовая скорость R равна не $1/2$, что было бы крайне удобно при формировании управляющих воздействий (тактовых импульсов) для аппаратуры, использующей АВ, а $R=100/212 \approx 0,47$, что неоправданно усложняет разработку систем с аппаратурой кодирования.

Именно поэтому **возникает задача** разработки такого способа кодирования и последующего декодирования сообщений при помехоустойчивом кодировании, когда обеспечивается работа декодеров при той же кодовой скорости R , что и у сверточного кода, выражаемой обычно отношением небольших целых чисел, т.е. нужны блочные коды с хорошим удобным декодированием, имеющие те же простые значения кодовых скоростей, что и у сверточных кодов, например, $R=1/2$, $R=1/3$, $R=3/4$ и т. д. Это существенно упростило бы применение кодирования с использованием АВ для конечных по длине сообщений, т. е. для блочных кодов.

Способ кодирования и декодирования

На рисунке 1 представлено устройство кодирования информации с использованием предложенного способа кодирования, превращающего сверточное кодирование в блочное с той же кодовой скоростью. Этот метод позволяет на приемном конце линии связи применить для декодирования различные алгоритмы, в том числе и АВ [2].

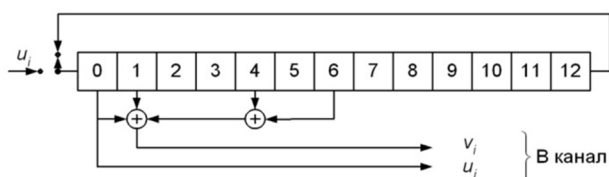


Рисунок 1 – Кодер квазициклического блочного кода

Данный блочный код задается образующим полиномом $g(x) = 1 + x + x^4 + x^6$ и характеризуется параметрами: длина кода $n=26$, длина информационной части кода $k=13$, кодовая скорость $R=1/2$, кодовое расстояние $d=5$. Он построен на основе более короткого сверточного кода с конструктивной длиной $K=7$, с тем же $d=5$ и тем же порождающим полиномом. Важно, что для этого правая часть регистра кодера, не содержащая отводов на полусумматоры, должна быть такой же или больше, чем максимальная степень сверточного полинома (в данном случае шестая). Подчеркнем, что такое преобразование сверточного кода в блочный квазициклический код хорошо известно и давно используется в технике кодирования [3 – 6]. Дополнительную информацию по этим методикам, часто называемым циклическим усечением сверточных кодов и анализируемым с помощью циклических решеток, можно найти в [7]. Там же приведены ссылки на других авторов, занимающихся этой темой.

Представленное выше устройство кодирования (кодер) информации блочным квазицикли-

ческим кодом работает следующим образом. В кодер сначала некоторым образом записываются информационные символы, предназначенные для их помехоустойчивого кодирования и последующей передачи по каналу связи. Далее производится главная процедура кодирования, в результате которой получается блок кодовых символов для передачи по каналу связи с шумом. В этой процедуре после каждого циклического сдвига кодирующего регистра и вычисления проверочных символов кодовые символы (в рассматриваемом примере символы u_i и v_i) направляются в канал. Процесс формирования кодовых символов заканчивается, когда после ряда циклических сдвигов регистра сдвига кодера он оказывается в исходном состоянии. После этого можно приступить к кодированию следующего информационного блока. Подчеркнем, что такая же схема кодирования может использоваться для формирования не систематического блочного кода, который также легко декодируется с помощью АВ.

Пусть на приемном конце линии связи декодирование происходит так, что АВ (или какой-то другой алгоритм декодирования) сразу начинает работать точно так же, как и при обычном декодировании исходного длинного (возможно, бесконечного) сверточного кода с произвольного места, например прямо с первых символов квазициклического блочного кода, поступивших в декодер. После приема и обработки последнего кодового подблока принятого сообщения в декодер снова в соответствии с видом циклической решетки блочного кода подаются также циклически первый подблок кодовых символов этого кода, затем второй и т.д. В зависимости от длины кода и уровня шума в декодер таким образом можно циклически подать снова 2...5 или более раз все кодовые символы принятого кодового блока. Отметим, что поскольку у квазициклического кода нет «начала», то декодер, как и в бесконечном сверточном коде, будет выходить на правильное (т.е. с малым числом ошибок) решение только после прихода в декодер примерно первых $D \sim (3 \dots 20)K$ кодовых подблоков. После обработки этих кодовых подблоков, когда декодер уже принимает достаточно достоверные решения относительно декодируемых символов, решения декодера обязательно повторяются также с периодом, очевидно, равным размеру блочного кода. Значит, получателю информации (приемнику) нужно передать от декодера только очередной двоичный информационный блок, соответствующий переданному кодовому слову, т.е. часть последовательности решений декодера, который, например, в случае кодера на рисунке 1 имеет длину 13 битов. При этом из

декодера его надо взять за пределами первых D принятых декодером кодовых подблоков, где, как уже указывалось выше, эти решения в основном неправильны. С другой стороны, для АВ также хорошо известно (см. [3]), что другое условие достаточной достоверности решений состоит в том, что обычно такие правильные решения декодера формируются не ранее, чем после приема $L=(5...25)K$ кодовых подблоков, конкретное число которых тоже зависит от кода и уровня шума в канале. Таким образом, АВ (или другой алгоритм декодирования) должен как бы «принять» циклически несколько одинаковых (!) кодовых блоков и затем передать приемнику двоичные информационные символы, находящиеся приблизительно в середине этой циклической последовательности решений декодера, так как решения, находящиеся близко к месту приема очередного кодового подблока и близко к месту приема самых первых кодовых подблоков, малодостоверны по сравнению с потенциальными возможностями применяемого кода.

Очевидно, что корректирующая способность декодера блокового кода остается почти такой же, как и у декодера сверточного кода, если длина блокового кода по сравнению со сверточным оказывается существенно, в 10...30 раз большей. При укорочении блокового кода и при сохранении длины составляющего сверточного кода, характеристики декодера блокового кода, конечно, должны несколько ухудшаться. Однако простота и привычность (конечно же, условные) декодирования с использованием АВ при сохранении кодовой скорости исходного сверточного кода позволяют считать, что оптимальное декодирование блоковых кодов на основе АВ позволит намного проще решать практически все задачи коррекции ошибок в блоковых кодах.

Характеристики декодирования блоковых кодов на базе алгоритма Витерби

На рисунке 2 представлены результаты для декодеров блоковых кодов, которые были получены на персональном компьютере описанными выше методами коррекции ошибок в квазициклических кодах на основе классического АВ. По вертикальной оси отложены оценки вероятности ошибки на бит BER и на блок WER для декодеров указанных далее кодов. На горизонтальной оси указано битовое отношение сигнал-шум E_b/N_0 в канале с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ) для кодовой скорости $R=1/2$.

График VA7 соответствует декодеру, реализующему обычный АВ для стандартного сверточного кода с $K=7$, а график VA15 соответству-

ет декодеру сверточного кода с $K=15$. Последний декодер на современной элементной базе уже легко реализуем. Можно напомнить, что впервые столь длинный код при небольшой кодовой скорости R был использован еще в прошлом тысячелетии для проекта NASA «Кассини».

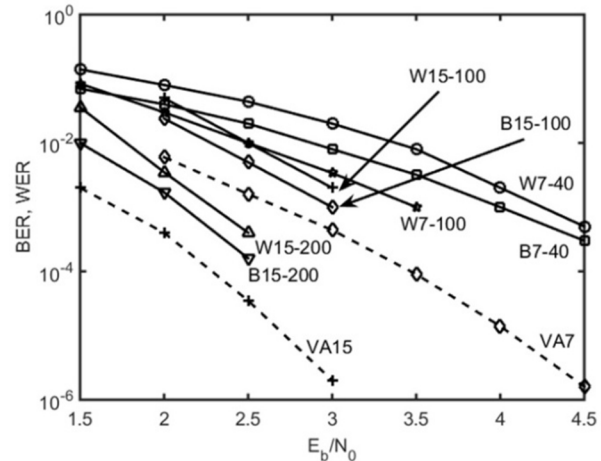


Рисунок 2 – Характеристики декодеров для сверточных и блоковых кодов в канале с АБГШ

Для остальных графиков, представляющих характеристики декодеров блоковых кодов, используются обозначения в виде $XK-n$. Здесь X соответствует типу вероятностей, которые представляют графики (B – BER, W – WER), K определяет конструктивную длину сверточного кода, выбранного за основу блокового (7 или 15), а n – длину использованного блокового квазициклического кода (40, 100 и 200 битов).

Выполним анализ результатов моделирования. Как уже отмечалось выше, чтобы вероятности BER при декодировании блоковых кодов были близки к характеристикам декодеров исходных сверточных кодов, нужно, чтобы длины создаваемых квазициклических блоковых кодов существенно превосходили длины исходных сверточных кодов, причем, с увеличением параметра K эта разница также должна расти. Например, график VA7 почти совпадает с вероятностью BER для блокового кода длины $n=100$ с образующим его сверточным кодом с $K=7$. Поэтому этот график не потребовалось рисовать отдельно. При использовании этого же сверточного кода в блоковом коде с $n=40$ разница между параметрами K и n достаточно мала. Поэтому характеристики декодера этого блокового кода при том же значении $K=7$, что и в предыдущем случае, оказываются слабее: оба графика B7-40 и W7-40 находятся существенно выше, чем графики VA7 и W7-100 для первого кода.

Аналогичное соотношение характеристик наблюдается и в случае базового сверточного кода с $K=15$. Для декодера этого варианта бло-

кового кода BER будет мало отличаться от BER для декодера сверточного кода только при длинах n , превышающих, видимо, 300...400 битов. Графики BER и WER при $K=15$ приведены на рисунке 2 для $n=100$ и $n=200$. Они показывают, что с уменьшением n возможности блокового кода с декодированием по АВ заметно уменьшаются, как и должно быть для любого блокового кода, сравниваемого со сверточным при сопоставимых длинах.

Отметим, что обсуждаемые блоковые коды, аналогично их сверточному прототипу, легко декодируются при переходе к варианту АВ с неполным просмотром путей [8]. Однако тут надо проводить очень точные настройки параметров.

Нелишне напомнить, что предложенные блоковые модификации сверточных кодов легко включаются в различные параллельные и последовательные схемы каскадирования. Этим снимаются многие вопросы разработки и использования блоковых кодов, которые нередко объявляются безо всяких (пока что!) на то оснований революцией в технике кодирования и декодирования. Анализ некоторых методов такого «уровня» приведен в [9]. Сопоставление представленных там полярных кодов [10] и других методов носит предварительный характер из-за очень ограниченного фактического материала по этим алгоритмам, объявленным перспективными. Там же показано, что декодеры, реализующие АВ, и многопороговые декодеры (МПД), даже без какой-либо адаптации к условиям сопоставления методов, близки к ним по эффективности. Все заявляемые преимущества кодов [10] при небольших длинах блоков и, вследствие этого, их невысокие в принципе характеристики легко достижимы декодерами Витерби, МПД и декодерами каскадных схем с их участием при весьма небольшой сложности [3 – 6, 11].

Сложность блоковых модификаций алгоритма Витерби

Из принципа построения блоковых модификаций АВ ясно, что сложность предложенных декодеров переборного типа, о чем не следует забывать, оказывается приемлемой для многих приложений, так как сверточные версии АВ всесторонне проработаны уже несколько десятилетий назад, а блоковая модификация почти ничем не отличается от исходной сверточной.

Вместе с тем полезно указать на некоторые особенности блоковой модификации АВ и ее возможности. Необходимость для каждого кодового блока декодировать повторяющуюся последовательность символов несколько большей длины, чем размер блока, не очень усложняет

алгоритм. В абсолютном большинстве случаев можно ограничиваться декодированием «сверточного» кода, длина которого, например, в представленных выше экспериментах никогда не превышала размеров блокового кода более, чем в 5 раз. Обычно в рамках эксперимента оказывалось возможным ограничиться трехкратной разницей в длинах кодов и эту величину можно снизить еще примерно в полтора раза.

При программной реализации значительные вычислительные затраты необходимы на сопровождение выживших путей, число которых, как известно, растет экспоненциально с ростом конструктивной длины K сверточного кода. При этом возможна экономия в вычислениях по перестроению этих путей на каждом шаге декодирования за счет двойного роста памяти, которая используется для запоминания ссылок на предыдущие позиции выживших путей. Возможна и значительная экономия памяти путей, за счет чего появляется возможность реализовать блоковый АВ для кодов с $K \sim 28$ или даже для несколько больших значений конструктивных длин базового сверточного кода. При этом увеличиваются вычислительные затраты, которые могут возрасти до 2...4 раз. Наконец, напомним, что блоковый АВ должен лишь однажды просмотреть лучший путь после завершения всей процедуры декодирования и выбрать при этом среднюю часть из последовательности своих решений в как бы «сверточном» коде. Это тоже несколько снижает объем вычислений.

Большинство указанных обстоятельств было рассмотрено и проанализировано в процессе моделирования блоковых и сверточных версий АВ как для одинаковых, так и для различных параметров используемых кодов. При этом глубокие процедуры оптимизации вычислений для повышения скорости декодирования не проводились. Очевидно, что эта задача заслуживает отдельного внимания и рассмотрения. Оказалось, что для типичных вариантов декодирования производительность сверточных и блоковых версий АВ отличалась не очень сильно. Для кодов с $K=7$ при одном из вариантов АВ, выполняющемся на персональном компьютере с процессором Core-i7 с тактовой частотой порядка 3 ГГц, декодирование в сверточном классическом варианте происходило со скоростью около 100 Кбит/с, а в блоковой версии – порядка 60 Кбит/с. При использовании блоковых кодов, основанных на сверточных с $K=15$, скорость декодирования была равна 1,0 Кбит/с, а при использовании сверточного варианта составила около 600 бит/с. Эти данные свидетельствуют о хорошем уровне декодирования в программе для блоковой версии

АВ, не содержащей явных недостатков при реализации каких-либо ее компонент. Основные возможности улучшения разработанной версии блочного АВ были рассмотрены выше.

Наконец, укажем на то, что близкие скорости работы сверточных классических версий АВ и их новых блочных модификаций при моделировании свидетельствуют о том, что сложность блочного АВ, конечно, в пересчете на информационные биты осталась пропорциональной 2^K . Это следует и из описания предложенного алгоритма, который просто совпадает с исходным методом. В связи с этим полезно обратить внимание на то, что почти все методы «циклического усечения хвостов» при переходе от сверточных кодов к их блочным версиям, в том числе и методы, представленные в [7], характеризуются тем, что предлагаемые там декодеры имеют сложность, близкую к 2^{2K} . Очевидно, что настолько большая сложность таких модификаций АВ является совершенно неприемлемой. Авторы этих методов и оценок их характеристик вполне обоснованно указывают на то, что тут возможны существенные упрощения. Некоторые из таких методов упрощения для блочного АВ ими были предложены, однако оценок для сложности подобных улучшений в удобном для интерпретации виде до сих пор нет.

Таким образом, предложенный блочный вариант АВ является достаточно простой и очень ясной модификацией классического АВ для сверточных кодов и имеет сложность, как это следует из его описания, превышающую сложность исходного алгоритма не более, чем в 2...3 раза. Возможно, что некоторые его модификации окажутся еще более простыми. Этим определяются его возможности по использованию в системах связи самого широкого назначения.

Выводы

Представляется правдоподобным, что в настоящее время наилучшие характеристики по быстродействию и эффективности декодирования могут обеспечить только коды с прямым контролем метрики. К ним относятся различные МПД алгоритмы, все модификации АВ, а также дивергентные схемы коррекции ошибок [12], построенные на их основе. Все эти методы объединяет простота и однородность вычислений, а также свойство точного измерения расстояний от решений этих декодеров до принятых из канала сообщений, которым не обладают другие повсеместно исследуемые сейчас методы декодирования. Заметим, что если декодер не учитывает и не измеряет ни в каком виде точное рас-

стояние до принятого сообщения, то такие алгоритмы коррекции становятся неработоспособными при большом уровне шума, а в случае малых вероятностей ошибок в канале можно использовать другие более простые методы.

Создание предложенной модификации блочного АВ, который, разумеется, также относится к методам с прямым контролем метрики, применение вместе с ним методов дивергентного кодирования, алгоритмов МПД, классических и параллельных методов каскадирования [4, 5], создает условия для еще более широкого применения различных методов кодирования, представленных на порталах [13]. Там же можно найти некоторые публикации, на которые даны ссылки при изложении этого материала, а также другие статьи, презентации и книги по теории кодирования и ее прикладным вопросам.

Работа выполнена при финансовой поддержке РГРТУ и РФФИ (грант 15-07-06348).

Библиографический список

1. **Viterbi A.** Error Bounds for Convolutional Codes and an Asymptotically Optimum Decoding Algorithm // IEEE Trans. 1967. IT-13. P. 260–269.
2. Патент № 2608872 РФ. Способ кодирования и декодирования блочного кода с использованием алгоритма Витерби / Золотарев В. В., Овечкин П. В. (ИКИ РАН). Оpubл.: 2017.
3. **Золотарев В. В., Овечкин Г. В.** Помехоустойчивое кодирование. Методы и алгоритмы. Справочник. М.: Горячая линия-Телеком, 2004. 124 с.
4. **Золотарев В. В.** Теория и алгоритмы многопорогового декодирования. М.: Радио и связь, Горячая линия-Телеком, 2006. 236 с.
5. **Zolotarev V. V., Zubarev Y. B., Ovechkin G. V.** Optimization Coding Theory and Multithreshold Algorithms. Geneva, ITU, 2015. 159 p.
6. **Золотарев В. В., Зубарев Ю. Б., Овечкин Г. В.** Многопороговые декодеры и оптимизационная теория кодирования; под редакцией академика РАН В.К. Левина. М.: Горячая линия-Телеком, 2012. 238 с.
7. **Кудряшов Б. Д.** Основы теории кодирования. СПб: БХВ-Петербург, 2016. 393 с.
8. **Овечкин Г. В., Овечкин П. В.** Алгоритм декодирования Витерби с продолжением только наиболее вероятных путей // Материалы 18-й Международной научно-технической конференции «Проблемы передачи и обработки информации в сетях и системах телекоммуникаций». Рязань, 2015. С. 39–42.
9. **Золотарев В. В., Овечкин Г. В., Овечкин П. В.** О сопоставлении новых методов помехоустойчивого кодирования // Доклады 18-й Международной конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применение». Москва, 2016. Т. 1. С. 59-64.
10. **Arikan E.** Channel Polarization: A Method for Constructing Capacity-Achieving Codes for Symmetric Binary-Input Memoryless Channels // IEEE Transactions on Information Theory. 2009. Vol. 55. No. 7. С. 3051–3073.

11. **Золотарев В. В.** Использование многопорогового декодера вместо алгоритма Витерби // Вестник Рязанской государственной радиотехнической академии. Рязань, 2002. Вып. 10. С. 117–119.

12. **Золотарев В. В., Овечкин Г. В.** Дивергентное кодирование сверточных кодов // Материалы 18-й

Международной научно-технической конференции «Проблемы передачи и обработки информации в сетях и системах телекоммуникаций». Рязань, 2015. С. 27–32.

13. Ресурсы www.mtdbest.ru и www.mtdbest.iki.rssi.ru.

UDC 621.391:519.72

THE PERFORMANCE OF BLOCK IMPLEMENTATION OF VITERBI ALGORITHM

V. V. Zolotarev, leading researcher of SRI RAS; zolutasd@yandex.ru

G. V. Ovechkin, PhD, full professor, RSREU; g_ovechkin@mail.ru

P. V. Ovechkin, PhD, associate professor, RSREU; pavel_ov@mail.ru

The article deals with optimal methods for decoding of error-correction codes allowing to improve reliability of data transmission through noisy channels. The aim of this work is improving the performance of decoder for short block codes. A simple modification of decoder for quasi cyclic block codes based on short convolutional codes is submitted. The proposed decoder uses the Viterbi algorithm which doesn't consider block structure of a code but decodes it as if infinity sequence. The analysis of submitted decoder performance is fulfilled and the decoder complexity is estimated. It is shown that the submitted Viterbi decoder for a block code may provide a bit error rate similar to a bit error rate for Viterbi decoder of appropriate convolutional code at two or three time complexity increase only.

Key words: communication system, error-correction coding, Viterbi algorithm, convolutional codes, block codes, quasi cyclic code, cyclic trellis, decoder complexity.

DOI: 10.21667/1995-4565-2017-59-1-30-35

References

1. **Viterbi A.** Error Bounds for Convolutional Codes and an Asymptotically Optimum Decoding Algorithm, IEEE Trans., 1967, it-13, pp. 260–269.

2. **Patent № 2608872 RF.** Способ кодирования и декодирования блокового кода с использованием алгоритма Витерби. Золотарев В. В., Овечкин П. В. (IKI RAN). Publ.: 2017. (in Russian).

3. **Zolotarev V. V., Ovechkin G. V.** Помехоустойчивое кодирование. Методы и алгоритмы. Справочник (Error-correction coding. Methods and algorithms. handbook), Moscow: Goryachaya liniya. Telekom, 2004, 124 p. (in Russian).

4. **Zolotarev V. V.** Теория и алгоритмы многопорогового декодирования (Theory and algorithms of multithreshold decoding). Moscow: Radio i svjaz, Goryachaya liniya. Telekom, 2006. 236 p. (in Russian).

5. **Zolotarev V. V., Zubarev Y. B., Ovechkin G. V.** Optimization Coding Theory and Multithreshold Algorithms. Geneva, ITU, 2015, 159 p.

6. **Zolotarev V. V., Zubarev Y. B., Ovechkin G. V.** Многопороговые декодеры и оптимизационная теория кодирования (Multithreshold decoding and optimizing coding theory), Moscow: Goryachaya liniya. Telekom, 2012, 239 p. (in Russian).

7. **Kudrjashov B. D.** Основы теории кодирования (The basis of coding theory), Saint-Petersburg: BKhV-Peterburg, 2016, 393 p. (in Russian).

8. **Ovechkin G. V., Ovechkin P. V.** Алгоритм декодирования Витерби с продолжением только наиболее вероятных путей (Viterbi algorithm which one kept most-likely paths), Proceeding of 18-th International Science Conference «Problemy peredachi i obrabotki informatsii v setyakh i sistemakh telekommunikatsii». Ryazan, 2015. pp. 39–42 (in Russian).

9. **Zolotarev V. V., Ovechkin G. V., Ovechkin P. V.** О сопоставлении новых методов помехоустойчивого кодирования. Proceeding of 18-th International Conference «Tsifrovaya obrabotka signalov i ee prilozheniya» Moscow, 2016, vol. 1, pp. 59–64. (in Russian).

10. **Arikan E.** Channel Polarization: A Method for Constructing Capacity-Achieving Codes for Symmetric Binary-Input Memoryless Channels, IEEE Transactions on Information Theory, 2009, vol. 55, no. 7, pp. 3051–3073.

11. **Zolotarev V. V.** Использование многопорогового декодера вместо алгоритма Витерби, Vestnik Ryzanskoi gosudarstvennoy radiotekhnicheskoi akademii, Ryazan, 2002. issue 10. pp. 117–119. (in Russian).

12. **Zolotarev V. V., Ovechkin G. V.** Дивергентное кодирование сверточных кодов. Proceeding of 18-th International Science Conference «Problemy peredachi i obrabotki informatsii v setyakh i sistemakh telekommunikatsii». Ryazan, 2015, pp. 27–32. (in Russian).

13. Web sites www.mtdbest.ru and www.mtdbest.iki.rssi.ru.