АЛГОРИТМЫ МНОГОПОРОГОВОГО ДЕКОДИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ КОДОВ

The article deals with the main principles of linear codes' multi-threshold decoding as a search of global extremum of multiple variables functional. The author notes the value of antinoise coding for mobile communication systems. He demonstrates that the effectiveness of multi-threshold decoding is close to the results provided by optimal searching methods. The complexity evaluation of the decoding by operations number is provided.

В.В. ЗОЛОТАРЁВ,
ИКИ РАН

ВВЕДЕНИЕ

Применение помехоустойчивого кодирования позволяет решать большое число задач в цифровых сетях, которые были принципиально недоступны при аналоговой обработке сигнала. Основное преимущество систем связи, использующих помехоустойчивое кодирование, состоит в том, что эффективность использования каналов оказывается во много раз более высокой, чем в случае, когда оно не используется. Мерой роста эффективности обычно выбирается энергетический выигрыш кодирования (ЭВК), который указывает, насколько можно снизить удельную энергетику канала, т. е. отношение средней энергии передачи одного бита данных к спектральной плотности мощности шума E_b/N_0, при использовании некоторых методов кодирования и декодирования по сравнению с их отсутствием, чтобы сохранить необходимую в системе высокую достоверность передачи данных. Например, вероятность ошибки на бит $P_b(e)$ должна составлять 10^{-6}.

Этими возможностями кодирования определяется необходимость его применения и в системах мобильной связи. Способность кодов обеспечивать связь при небольшом уровне сигнала позволяет минимизировать размеры аппаратуры, повысить скорость передачи по каналам мобильной связи, существенно уменьшить размеры антенн и многократно увеличить срок службы автономных источников питания. При этом во многих случаях величина ЭВК может достигать 10 дБ и более. Кроме того, важно подчеркнуть, что необходимая достоверность передачи данных в каналах с шумами в дальнейшем будет только расти, что при прочих равных условиях приведет только к ужесточению требований, предъявляемых к системам кодирования. А это, в свою очередь, будет способствовать росту обеспечиваемого ими ЭВК.

В мобильной связи используются как декодеры, реализующие хорошо известный специалистам алгоритм Витерби (АВ), так и значительно более сложные кодовые конструкции. Однако применяемые в настоящее время системы кодирования, особенно для высокоскоростных каналов, все еще очень сложны или малоэффективны. Ниже рассмотрены теоретические основы и конкретные характеристики высокоэффективного быстродействующего и очень простого итеративного алгоритма коррекции ошибок в каналах с большим уровнем шума, являющегося результатом развития идей мажоритарного декодирования линейных сверточных кодов.

ПРИНЦИП ПОВТОРНОГО ДЕКОДИРОВАНИЯ

За последние десятилетия теория и техника помехоустойчивого кодирования продвинулись далеко вперед. Предложенные в 70-х гг. прошлого века многими специалистами методы повторного декодирования принятых сообщений оказались малоэффективными вследствие сильного группирования ошибок на выходе декодера. Пример такой схемы с пороговым декодером (ПД) [1] для сверточного кода приведен на рис.1.

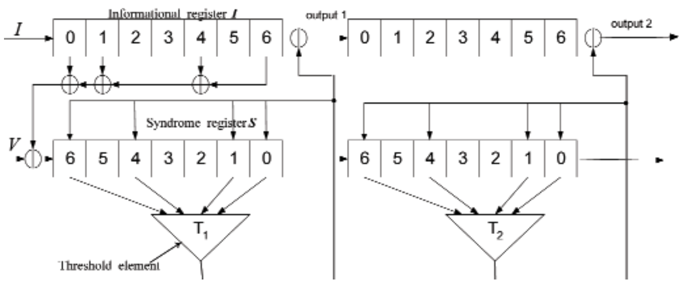

Рис. 1. Пример схемы повторного декодирования на основе порогового декодера сверточного кода

Малая эффективность подобной схемы декодирования была следствием сильного группирования, т.е. размножения ошибок (РО) в пороговом декодере. В самом деле, если при некотором уровне шума в двоичном симметричном канале (ДСК) с независимыми ошибками в какой-то момент ПД принял неправильное решение об очередном информационном символе, то обычно на его выходе далее появлялся очень плотный пакет ошибок. Например, пусть с выхода первого ПД (см. рис. 1) на вход второго поступила немного улучшенная при первой попытке декодирования последовательность.

Тогда если ошибок в некоторой части информационной последовательности после первого ПД нет, то второй декодер не нужен. Но при появлении на выходе первого ПД ошибки, которая обычно является началом типичного пакета ошибок для этого ПД, оказывается, что второй декодер, точно повторяющий схему первого и настроенный на исправление только случайных ошибок, скорее всего, не исправит этот пакет. Следовательно, он не нужен и в этом случае.

Подчеркнем, что коды с малым уровнем размножения ошибок в ПД в те годы были совершенно неизвестны. Однако позже эта проблема была полностью решена методами, описанными в [3, 7, 9]. Они будут представлены и в данной работе. В связи с этим приобретает важное значение рассмотренный ниже новый подход к реализации простых эффективных процедур исправления ошибок, который развивается с 1972 г. и назван многопороговым декодированием (МПД) [2].

ПРИНЦИП ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА

Развитие методов декодирования помехоустойчивых кодов в течение длительного времени никак не было связано с методами решения задачи оптимизации функционала от многих дискретных переменных. Тем не менее декодирование, т.е. поиск единственного кодового слова из экспоненциально большого числа возможных сообщений, совершенно естественно было бы рассматривать именно с таких позиций. Однако большинство разрабатывавшихся ранее алгоритмов декодирования никак не использовало для поиска наилучших решений декодера хорошо известные разнообразные мощные оптимизационные процедуры, которые вполне можно было бы применить к поиску кодовых слов, находящихся на минимально возможном расстоянии от принятого сообщения. Заметим, что широко применяемый в технике связи алгоритм Витерби (АВ), используемый для декодирования по максимуму правдоподобия коротких сверточных кодов, также не относится к классу оптимизационных процедур, поскольку он непосредственно ищет оптимальное решение на основе очень удобного в реализации метода полного перебора.

Вместе с тем некоторые алгоритмы декодирования, в частности пороговые декодеры, относящиеся к простейшим методам коррекции ошибок, почти обладают именно теми свойствами. Эти свойства необходимы для реализации полноценных эффективных и одновременно исключительно простых итеративных процедур декодирования, которые действительно являются методами поиска глобального экстремума функционала от очень большого числа переменных.

Для подтверждения этого рассмотрим пример простейшей системы кодирования/порогового декодирования с кодовой скоростью $R = 1/2$ и минимальным кодовым расстоянием $d = 3$, показанный на рис. 2.

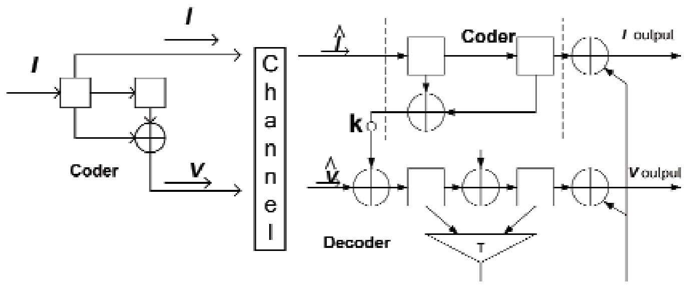

Рис. 2. Специальный вид системы кодирования, поясняющий новую интерпретацию вектора синдрома

Как следует из вида кодера и простейшего мажоритарного декодера, исправляющего в этом примере одну ошибку, в состав этого декодера входит точная копия кодера, которая формирует свои оценки проверочных символов кода по принятым из канала (возможно) с ошибками информационных символов кода. Эти символы появляются в точке *k* декодера и затем после сложения на полусумматоре с принятыми из канала проверочными символами *V* образуют символы вектора синдрома **S**, который зависит только от вектора ошибок канала. Эти символы и поступают потом на пороговый элемент декодера *T* из синдромного регистра, как это показано на рис. 2.

Уже сам вид ПД на представленной схеме кодирования/декодирования позволяет указать простой способ правильной процедуры оптимизации, т. е. поиска наилучшего возможного решения при декодировании. Укажем для этого на факт, который никогда не отмечался ранее: в регистре синдрома декодера находится разность по проверочным символам между принятым с искажениями из канала вектором **A** и таким кодовым словом $\mathbf{A}_r$, информационные символы которого совпадают с принятой из канала информационной частью вектора **A**.

Значит, полная разница между кодовым словом — текущей гипотезой-решением декодера $\mathbf{A}_j$ о переданном кодовом слове и принятым зашумленным вектором **A** будет в таком модифицированном декодере мажоритарного типа, где в ПД будет добавлен еще всего лишь один вектор, который всегда должен соответствовать разности между принятым вектором **A** и текущей гипотезой декодера $\mathbf{A}_j$ по информационным символам. В таком декодере и будет содержаться текущее значение полной разности и, следовательно, полное расстояние между решением декодера и принятым вектором. Это расстояние следует стремиться уменьшить до минимально возможного, что и будет соответствовать решению оптимального декодера (ОД).

ПРИНЦИПЫ РАБОТЫ МПД

Именно такой подход к достижениию высокоэффективного декодирования является основой развиваемых с 1972 г. специальных итеративных многопороговых декодеров (МПД) [2, 3], почти совпадающих с классическим ПД и таких же простых в реализации, как и их прототип.

Изменения, которые необходимо сделать в обычном ПД, чтобы преобразовать его в МПД, состоят в том, что решения всех пороговых элементов об изменениях декодируемых символов сначала запоминаются в дополнительном разностном регистре **D**, первоначально, естественно, нулевом. Эти решения затем используются последующими пороговыми элементами (ПЭ) декодера в качестве дополнительной проверки при дальнейшем уточнении значений декодируемых символов. Такой декодер измеряет полные расстояния между все более новыми потенциальными решениями и принятым вектором **A**. Он изменяет декодируемые символы так, что каждое новое решение такого МПД всегда ближе к принятому из канала вектору. Это позволяет во многих случаях практически полностью реализовать корректирующие возможности используемых кодов. Примеры конкретных схем МПД приведены в [10].

Декодер после этого простого усовершенствования приобретает новые чрезвычайно полезные свойства [3, 7, 9]. Решения МПД при каждом изменении декодируемых им информационных символов строго приближаются к решению оптимального декодера, обеспечивая во многих случаях реализацию этого процесса даже после нескольких десятков попыток коррекции кодового блока или потока символов сверточного кода. Разумеется, для обеспечения высокой эффективности МПД при больших шумах канала необходимо выбирать только специальные коды с малым уровнем размножения ошибок.

Рассмотрим далее описанные возможности МПД более формально.

Пусть задан двоичный линейный систематический блоковый пли сверточный код со скоростью передачи $R = k/n$, где k — число информационных символов, n — длина кодовой комбинации.

При передаче по двоичному симметричному каналу без памяти оптимальный декодер, минимизирующий среднюю вероятность ошибки, из множества $2k$ равновероятных кодовых слов $\{\mathbf{A}\}$ выбирает такой вектор **A**, для которого расстояние Хэмминга $r = |Q \oplus A|$, где Q — принятое сообщение, $\oplus$ — сложение по модулю 2 (mod 2), было бы минимальным по всему множеству $\{\mathbf{A}\}$.

Будем любой двоичный вектор **X** длины n представлять парой векторов $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_v$ длины k и $(n - k)$, соответственно относящихся к информационной и проверочным частям вектора

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_I, \mathbf{X}_V).$$

Тогда в предположении, что проверочная матрица кода представлена в систематическом виде $H = (C : I)$, имеет место лемма, что для любого кодового вектора **A** и принятого сообщения **Q** справедливо соотношение

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{Q} = (\mathbf{D}, \mathbf{H}(\mathbf{QI} \oplus \mathbf{D}, \mathbf{Qv})),$$

где вектор **D** длины k определяется соотношением

$$\mathbf{A}_I = \mathbf{Q}_I \oplus \mathbf{D}.$$

Ее смысл заключается в том, что разность $\mathbf{B} = \mathbf{Q} \oplus \mathbf{A}$ для любого принятого вектора **Q** и кодового слова **A** определяется парой векторов (**D**, **S**). Перебором всех векторов $\mathbf{A}_i$ можно найти вектор **A**, минимизирующий **B** и являющийся решением оптимального декодера. В силу определения при $\mathbf{D} = 0$ вектор **S** является обычным синдромом принятого сообщения Q : S = HQ. Для простоты изложения будем в дальнейшем и при $D = 0$ называть **S**-синдромом, поскольку это обобщение естественно и не приводит в дальнейшем к каким-либо противоречиям. Отметим также, что при каждом изменении **A** нет необходимости заново вычислять все компоненты синдрома. Достаточно на каждом шаге изменения инвертировать только те компоненты **S**, которые содержат нечетное число ошибок в изменяемых информационных символах.

Однако переборные алгоритмы слишком сложны. Поэтому рассмотрим алгоритм декодирования, который близок к пороговому и в связи с этим просто реализуем.

1. Пусть на первом подготовительном этапе декодер выполняет вычисление и запоминание вектора **S**. Затем начинается выполнение процедуры декодирования.

2. Выбирается некоторый информационный символ i_j, и для него вычисляется обычная сумма компонентов синдрома $\mathbf{S}_{jk}$, содержащих в качестве слагаемых ошибку в декодируемом символе i_j (т. е. сумму проверок $\mathbf{s}_{jk}$ $\{\mathbf{S}_j\}$, где $\{\mathbf{S}_j\}$— множество проверок относительно компоненты e_j, соответствующей символу i_j) и символа d_j, компоненты вектора **D** также относящегося к декодируемому символу i_j:

$$L_j = \sum_{s_{jk} \in \{S_j\}} \mathrm{s}_{jk} + \mathrm{d}_j. \qquad (1)$$

Будем при этом полагать, что первоначально $D = 0$, потому что перед началом операций декодирования в памяти декодера есть только принятый вектор **Q** и декодер не имеет никаких других более предпочтительных гипотез о переданном сообщении.

Выберем порог T равным половине всех слагаемых в (1). Для самоортогональных кодов это число равно $T = d/2 = (J + 1) / 2$.

3. Пусть наконец все $J = d - 1$ проверок, i_j и d_j инвертируются при $L_j > T$ и остаются неизменными при $L_j \le T$.

4. Меняется декодируемый информационный символ и декодер возвращается в п. 2, если не принято решение о прекращении процедуры декодирования.

Предлагаемая процедура при первой попытке декодирования, пока все $d_j = 0$, совпадает с обычным алгоритмом для ПД. Будем в дальнейшем называть декодер, реализующий предлагаемый алгоритм, многопороговым декодером (МПД).

При этом справедлива основная теорема многопорогового декодирования (МПД), которая утверждает, что если на произвольном j-м шаге МПД изменяет декодируемый информационный символ i_j, то:

а) при этом МПД находит новое кодовое слово $\mathbf{A}_2$, более близкое к принятому сообщению $\mathbf{Q}$, чем то кодовое слово $\mathbf{A}_1$, которому соответствовало значение перед j-м шагом декодирования

$$|\mathbf{B}_1| = |\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{Q}| > |\mathbf{A}_2 \oplus \mathbf{Q}| = |\mathbf{B}_2|;$$

б) после окончания j-го шага возможно декодирование любого очередного символа $i_k, k \neq j$, так что при его изменении будет осуществлено дальнейшее приближение к принятому сообщению.

Теорема утверждает, что МПД при каждом изменении декодируемых символов приближается к принятому вектору $\mathbf{Q}$, отыскивая тем самым все близкие к оптимальному решению более правдоподобные векторы $\mathbf{A}_i$. МПД просматривает и сравнивает не экспоненциально большое количество кодовых слов, а только пары, отличающиеся между собой лишь в одном информационном символе, причем одно из сравниваемых слов находится в декодере. В случае, если второе кодовое слово окажется ближе к вектору $\mathbf{Q}$, чем то, которое находится в МПД, декодер переходит к нему и дальнейшие сравнения производятся уже с новым промежуточным вектором $\mathbf{A}_i$. Ясно, что в принципе можно проводить достаточно большое число попыток декодирования всех символов кода. Тем самым будет осуществляться сходимость к решению оптимального декодера — вектору $\mathbf{A}$. Принципиально важно, что при этом сложность МПД остается такой же, как и у обычного ПД — линейной.

Также устойчивость решения МПД относительно оптимального решения: достигнув его, МПД останется в нем. Это очень важно, поскольку алгоритм предполагает возможность многократного изменения декодируемых символов.

Для применения алгоритма МПД при декодировании в гауссовском канале с квантованием принимаемого двоичного потока на M уровней ($M > 2$), удобно сначала переписать функцию правдоподобия L_j в виде

$$L_j = \sum_{s_{jk} \in \{S_j\}} \mathbf{w}_{jk}\,(2 \cdot s_{jk} - 1) + \mathbf{w}_{dj}\,(2 \cdot \mathbf{d}_j - 1). \qquad (2)$$

Для обычного ДСК это выражение с весами проверок W_{jk}, равными 1, очевидно эквивалентно (1). При переходе к гауссовскому каналу, т. е. в случае M ($M > 2$), , уровней квантования сигнала весовые коэффициенты при вычислении L_j могут выбираться как относительно небольшие вещественные или целые числа. Тогда декодируемые символы в МПД для гауссовского канала следует изменять при $L_j > 0$. При этом, если $M >> 1$, то, как известно, корректирующие возможности используемых кодов и хороших алгоритмов их декодирования, в том числе МПД, обычно улучшаются примерно на 2 дБ по уровню отношения сигнал/шум на входе декодера.

РАЗМНОЖЕНИЕ ОШИБОК ДЕКОДИРОВАНИЯ В МАЖОРИТАРНЫХ ДЕКОДЕРАХ

Из приведенного выше следует, что увеличение числа попыток исправления ранее декодированных символов с помощью МПД может быть действительно полезным, поскольку при каждом изменении информационных битов кода происходит переход к более правдоподобным решениям. Однако из этого не следует, что МПД обязательно достигнет оптимального решения. Для многих кодов существует весьма большое число таких сочетаний ошибок канала, что они исправляются при оптимальном декодировании, но не исправляются с помощью МПД. В значительной мере это связано с тем, что пороговые декодеры действительно в довольно большой степени подвержены влиянию эффекта размножения ошибок. Второй и другие последовательно соединенные улучшенные ПД, из которых состоят, например, сверточные МПД, обычно вынуждены работать в основном с потоками пакетов ошибок от предыдущих итераций декодирования декодеров.

Ниже представлен метод оценки размножения ошибок для самоортогональных кодов [12], состоящий в том, что с помощью многомерных производящих функций вероятности (ПФВ) вычисляются оценки вероятности появления одиночных ошибок и пакетов на выходе ПД. Этот метод помогает как при отборе кодов, в наименьшей степени подверженных влиянию размножения ошибок, так и при выборе оптимальных весов и порогов в МПД, обеспечивающих наименьшие значения вероятности его ошибок декодирования.

Пусть в двоичном симметричном канале (ДСК) задана вероятность ошибки P_0.

Выберем в некотором самоортогональном коде первый информационный символ i_0 и другой произвольный информационный символ i_m ($m > 0$). Для каждого из них можно перечислить те компоненты синдрома $\mathbf{S}$, которые образуют множество ортогональных проверок и подаются при их декодировании на ПЭ. Пронумеруем эти проверки от 1 до $J = d - 1$. Если при этом какой-то символ $s_n \in S$ будет поступать на ПЭ в обоих случаях, то он будет иметь два различных номера, соответствующих символам i_0 и i_m.

Рассмотрим теперь все информационные и проверочные символы, входящие в проверки хотя бы относительно одного из i_0 или i_m. Пусть необходимо построить верхнюю оценку совместной вероятности ошибки в двух символах i_0 и i_m : $P\,(\xi_0 = 1, \xi_m = 1)$.

Тогда аналогично одномерному случаю вычисления вероятности ошибки в первом символе $P_1(e)$ в обычном ПД получаем, что для любого i_k ($k \geq m$), ошибка в котором входит в качестве слагаемого в n-ю проверку относительно i_m и в l-ю проверку относительно i_m, ПФВ принимает вид $A_{nl}(x,y) = p_0 x_n y_i + q_0$. Если ошибка в некотором i_k входит в проверки только относительно i_0 или i_m, то ПФВ приобретает одномерный вид: $A_n(x) = p_0 x_n + q_0$ или $A_i(y) = p_0 y_i + q_0$ соответственно. Для проверочных символов, которые входят в качестве слагаемых только в проверки относительно одного из i_0 или i_m, одномерные ПФВ имеют такой же вид. Так как мы рассматриваем случай ошибок в ПД в i_0 и i_m, то в том проверочном символе (если он есть), который соответствует проверке, участвующей в решении ПД относительно i_0 и i_m, следует учесть, что через обратную связь на синдромный регистр **S** в эту проверку поступает ошибка порогового декодера. ПФВ для этого символа имеет вид $A_{nl}(x,y) = p_0 x_n + q_0 y_i$.

Наконец, последнее правило, которое необходимо выполнить при выводе оценки появления двух ошибок ПД, состоит в том, что относительно всех информационных символов $i_k, 0 < k < m$, предполагается, что при их декодировании через ОС на регистр **S** поступает истинное значение ошибки в i_k. Поэтому ошибки в этих символах при декодировании i_m отсутствуют. Такой гипотетический ПД называется декодером с "джином". В данном случае описание поведения ПД через свойства такого особого декодера позволит проще получить необходимые оценки для обычного ПД.

Введем теперь правило перемножения многомерных ПФВ. Оно состоит в том, что показатели степени при x_n и y_i с одинаковыми индексами складываются по mod 2. Таким образом, все показатели степени при x_n и y_i имеют только значения 0 или 1. Это связано с тем, что значения проверок могут быть только 0 или 1, а ошибки, относящиеся к одинаковым проверкам, имеют одинаковые индексы и сумма по mod 2 четного числа ошибок равна 0.

В результате перемножения всех ПФВ получаем сумму $A_{0m}(x,y) = \sum a_{n_1 n_2 \ldots n_d, k_1 \ldots k_d} x^{n_1+n_2+\ldots+n_d} y^{k_1+\ldots+k_d}$

из 2^{2d} слагаемых. Коэффициенты a с $2d$ индексами, где n_i и k_i равны 0 или 1, являются вероятностями значений проверок, определяемых этими индексами. После получения рассмотренных коэффициентов в результате суммирования тех из них, для которых в каждой группе индексов сумма единиц больше T, получаем оценку $P(\xi_0 = 1, \xi_m = 1)$ для ПД с "джином", поскольку сумма коэффициентов а равна вероятности всех возможных сочетаний ошибок в символах i_0, i_m и проверок, приводящих к ошибкам декодирования.

Теперь заметим, что в тех случаях, когда ПД с "джином" не ошибается ни в одном символе $i_k, 0 < k < k = n_A R$, в пределах длины кодового ограничения ПД также не совершает ни одной ошибки, так как решения "джина" совпадают с решением ПЭ.

Возможность оценивать вероятности появления двух ошибок в пределах длины кодового ограничения позволяет обобщить этот метод на пакеты ошибок декодирования любого веса. Для обеспечения высокой эффективности МПД достаточно рассматривать пакеты веса не более 3. При этом приходится проводить вычисления в пространстве параметров размерности 2^{3d}. Но при анализе кодов с $d \sim 7$ и более эта задача слишком сложна для вычислений.

Однако при дальнейших исследованиях были найдены методы значительного упрощения оценок вероятностей появления пакетов, которые затем позволили сформулировать комплекс критериев, по которым необходимо строить коды с очень малыми вероятностями появления пакетов ошибок при мажоритарном декодировании. Соответствующие алгоритмы построения таких кодов длины n требуют выполнения порядка n^4 операций, что позволяет искать эффективные коды до длин порядка 500 тыс. битов. Недавно этот алгоритм был еще немного улучшен.

При декодировании вблизи пропускной способности канала необходимо применение только очень длинных кодов. Поэтому завершенная разработка конструктивных методов построения кодов требуемого качества полностью решила проблему выбора кодов с незначительным уровнем размножения ошибок для высокоэффективных декодеров класса МПД.

ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕКОДИРОВАНИЯ

На рис. 3 показаны возможности различных алгоритмов декодирования как функции отношения битовой энергии передачи к спектральной плотности мощности шума канала $A = E_b/N_0$ для $R \sim 1/2$. Вертикальная линия C_2 соответствует пропускной способности канала $C = 1/2$ в гауссовом канале при $a = 0{,}2$ дБ. Графики VA_k показывают эффективность алгоритма Витерби для длин кода $k = 7, 11, 15$ и 20. Кривая T_1 соответствует весьма длинному турбокоду длины $n = 130\,000$ с довольно сложным алгоритмом декодирования [11], а энергетика стандартной каскадной схемы для алгоритма Витерби с кодом Рида-Соломона дается графиком VA-RS.

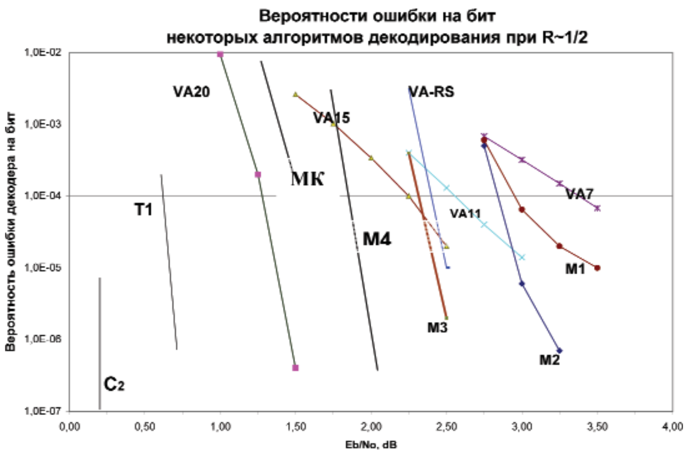

Рис. 3. Характеристики декодирования МПД и других алгоритмов коррекции ошибок

Далее представлены возможности некаскадных МПД для сверточных кодов.

Кривая M_1 приведена для очень простого сверточного МПД с $d_m = 9$, $I = 12$ итерациями и задержкой $L = 4800$ битов. Для $a > 3$ дБ решения МПД для этого кода совпадают с ортогональным декодером (с полным перебором).

Кривая M_2 соответствует возможностям МПД с $L = 10\,000$, $d = 11$ и $I = 9$. Полезно отметить, что он намного более эффективен, чем алгоритм Витерби с $K = 11$, который в настоящее время пока что трудно создать для высокоскоростных каналов. Этот МПД реализован аппаратно на ПЛИС Xilinx на информационной скорости более 80 Мбит/с [14,15].

Кривая M_3 показывает возможности МПД для кода с $d_m = 13$, при задержке $L < 99\,800$ и $I < 35$. Очень существенно, что этот последний пример МПД эффективнее весьма сложной каскадной схемы стандартного алгоритма Витерби с РС.

Последний пример характеристик МПД дается графиком M_4 для кода с задержкой не более 200 000 бит. Представляется очевидным, что среди некаскадных схем декодирования характеристики МПД далеко опережают другие алгоритмы коррекции ошибок.

Использование МПД в каскадных кодовых конструкциях позволяет еще более улучшить возможности этого метода. Некоторые примеры каскадных схем с использованием МПД приведены в [4 — 8, 10]. В качестве примера можно указать график МК (см. рис. 3), который соответствует каскадированию МПД с простейшим кодом контроля по четности. Как следует из приведенных данных, характеристики МПД позволяют реализовывать очень высокие уровни помехоустойчивости.

СЛОЖНОСТЬ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА МПД

Главным достоинством МПД является крайне малая сложность декодирования. Как и в случае обычного ПД, в МПД на каждой итерации суммируются взвешенные проверки, которые сравниваются с порогом и изменяются вместе с декодируемым символом, если этот порог превышен. Число итераций декодирования I в этом случае обычно не более 50, а общая сложность декодирования с помощью МПД, очевидно, оценивается для $d < 25$ как $N_1 \sim (d + 2) \cdot (I + 4)$. Но объем повторяющихся вычислений сумм на пороге можно значительно снизить, поскольку символы на каждом из пороговых элементов изменяются в процессе декодирования весьма редко. Если при тех же условиях на I и d возможно ухудшение характеристик МПД всего на 0,1 дБ по энергетике, что обычно вполне допустимо, то объем вычислений в МПД еще более уменьшается:

$$N_2 \sim C_1 \cdot d + C_2 \cdot I,$$

где константы C_1 и C_2 — небольшие целые числа.

Из полученной оценки непосредственно следует, что формально определяемая сложность как число операций у МПД почти на 2 порядка меньше, чем у турбоподобных кодов с сопоставимой энергетической эффективностью. Это же подтвердило компьютерное моделирование [13]. Отметим, что при таких оценках особенная сложность части операций, выполняемых при декодировании турбо кодов, не учитывается.

МПД-алгоритмы легко допускают полное распараллеливание. Поэтому при аппаратной реализации их быстродействие превышает в десятки раз скорость продвижения данных по сдвиговым регистрам аппаратуры кодирования. Эти регистры являются самыми быстродействующими элементами схемотехники и составляют почти весь объем аппаратуры МПД. Поэтому можно считать, что МПД — наиболее быстрые декодеры, к производительности которых другие алгоритмы не смогут даже приблизиться как при программной, так и при аппаратной реализации.

При правильном проектировании МПД функция суммирования проверок легко может быть реализована аппаратно таким образом, что она будет полностью эквивалентна простому однотактному сумматору. В этом случае оказывается, что преимущество МПД по скорости обработки относительно других методов может достичь трех десятичных порядков.

Подчеркнем, что существенная разница в эффективности МПД и других методов определяется тем, что этот метод при линейной от длины кода сложности декодирования обеспечивает при правильном проектировании декодера практически оптимальное декодирование длинных кодов при достаточно высоком уровне шума канала.

ВЫВОДЫ

Огромное преимущество МПД перед другими алгоритмами декодирования по числу операций как в двоичных, так и в недвоичных каналах позволяет считать, что к настоящему времени все принципиальные задачи предпринятых теоретических и прикладных исследований МПД успешно решены.

Разработанные программные и аппаратные версии МПД подтверждают все основные выводы об эффективности и производительности МПД. Программные версии соответствуют вычислительным затратам порядка 50 — 200 операций на бит данных, которые учитываются в приведенных выше оценках сложности алгоритма для достаточно больших шумов канала. Они реализованы в специализированных телевизионных системах.

При аппаратной реализации на ПЛИС даже на малых кристаллах ёмкостью до 200К МПД имеет производительность более 80 Мбит/с и энергетический выигрыш порядка 7,5 дБ. Такое соотношение характеристик эффективности и производительности для других некаскадных, базовых алгоритмов декодирования принципиально недостижимо.

Таким образом, в результате 30-летних исследований разработан широкий класс многопороговых алгоритмов, которые могут быть полезны для многих современных высокоскоростных систем связи с предельно возможными уровнями энергетического выигрыша и очень высоким быстродействием.

Исследования свидетельствуют, что нерационально использующие вычислительные ресурсы алгоритмы значительно проигрывают гораздо более простым алгоритмам МПД, которые решают проблему декодирования более эффективно и экономно. Несомненно, что проблемы сложности реализации кодирования сохранятся в обозримом будущем, а в связи с ростом скоростей обмена информацией требования более простой реализации декодеров будут все более актуальными. Более предпочтительными при всех вариантах реализации окажутся те алгоритмы, которые выполняют только очень простые, однородные и быстрые операции. Наиболее полно этим требованием удовлетворяют МПД. А соответствие его возможностей характеристикам самых сложных алгоритмов делает многопороговые алгоритмы еще более привлекательными.

Новейшие сведения и результаты исследований МПД (в том числе и доказательства теоретических результатов: леммы и основной теоремы МПД, сформулированных в статье) представлены на специализированном веб-сайте ИКИ РАН www.mtdbest.iki.rssi.ru.

Проведение теоретических и экспериментальных исследований МПД поддерживалось Научным советом по комплексной проблеме "Кибернетика" СССР, ИКИ РАН, ФГУП НИИРадио.

Финансовая поддержка исследований и разработок МПД осуществляется грантом РФФИ №05-07-90024.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Месси Дж.** Пороговое декодирование. — М.: Мир, 1966.

2. **Золотарев В.В.** Устройство для декодирования линейных сверточных кодов. — Авторское свидетельство на изобретение СССР №492878, "Бюллетень изобретений №43", 1975 г.

3. **Самойленко С.И., Давыдов А.А., Золотарев В.В.** Третьякова Е.И. Вычислительные сети. — М.: Наука, 1981. — 278 с.

4. **Золотарев В.В., Овечкин Г.В.** Эффективные алгоритмы помехоустойчивого кодирования для цифровых систем связи//Электросвязь, Москва. — № 9. — 2003. — с. 12 — 15.

5. **Золотарев В.В.** Простые методы исправления ошибок в каналах с большим уровнем шума. — Радиотехника. — 1991. — №10.

6. **Золотарев В.В.** Реальный энергетический выигрыш кодирования для спутниковых каналов. — В кн.: 4-я Международная Конференция "Спутниковая связь — ICSC-2000". — 200. — Т.2. — МЦНТИ. — С. 20 — 25.

7. **Zolotarev V.V.** The Multithreshold Decoder Performance in Gaussian Channels. -In Proc.: 7-th International Symposium on Communication Theory and applications, held on 13 — 18 July 2003, St. Martin's College, Ambleside, UK, pp.18 — 22.

8. **Золотарев В.В.** Характеристики каскадирования многопороговых декодеров для спутниковых каналов связи. — 5-я международная конференция "Цифровая обработка сигнала и ее применение", М., 2003. — С. 353 — 356.

9. Web-сайт www.mtdbest.iki.rssi.ru .

10. **Золотарев В.В., Овечкин Г.В.** Помехоустойчивое кодирование. Методы и алгоритмы. Справочник. "Горячая линия — Телеком". — М., 2004. — С.124.

11. **Berrou C., Glavieux A., Thitimajshima P.** Near Shannon Limit Error-Correcting Coding and Decoding: Turbo-Codes. — Proceeding of ICC'93, Geneva, Switzerland, pp. 1064 — 1070, May, 1993.

12. **Townsend R.L., Weldon E.J.** Self-Orthogonal Quasi-Cyclic Codes. — IEEE Trans., IT-13, 1967, pp.183 — 195.

13. **В.В. Золотарев, Г.В. Овечкин.** Сравнение сложности реализации эффективных методов декодирования помехоустойчивых кодов. — Труды НТОРЭС им. А.С. Попова, Выпуск VI-1, 6-я Международная конференция и выставка "Цифровая обработка сигналов и ее применение", Доклады-1, с. 220 — 222.

14. **Ю.Б.Зубарев, В.В.Золотарев.** Многопороговые декодеры: перспективы аппаратной реализации. — Труды РНТОРЭС им. А.С. Попова. 7-я Международная конференция "Цифровая обработка сигнала и ее применение". — Т. 1. — М., 2005. — С. 68 — 70.

15. **Ю.Б. Зубарев, В.В. Золотарев, С.Е. Жуков, В.В. Строков, Г.В. Овечкин.** Многопороговые декодеры для высокоскоростных спутниковых каналов связи: новые перспективы//Электросвязь. — 2005. — № 2. — С.10 — 12.