

Optimizing Theory: Taking Over the Leadership Baton From Classic Coding Theory

Valery V. Zolotarev¹, Ravil R. Nazirov¹, Gennady V. Ovechkin², Pavel V. Ovechkin²

¹Space Research Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
zolotasd@yandex.ru

²Ryazan State Radio Engineering University, Ryazan, Russia
g_ovechkin@mail.ru

Abstract

It is analyzed situation in the applied researches of main informatics branch – coding theory. Unresolved problems of classic coding theory are discussed. The main methods for implementation of multithreshold decoding (MTD) algorithms are expressed. These methods are considered as procedures for global extremum searching with minimal, i.e. linear complexity. From comparison abilities of this optimizing theory (OT) with performance of other error-correction methods it follows that OT methods and MTD with patented with our scientific school block Viterbi algorithms and new paradigms of coding theory development fully replace other decoding methods on implementation complexity, coding gain, resulting reliability criteria.

Keywords: error-correction coding, optimizing theory, block Viterbi algorithm, self-orthogonal codes, simbilical codes, concatenated codes, multithreshold decoders, coding gain, communication channel, Shannon bound

ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ТЕОРИЯ: ПРИЁМ ЭСТАФЕТЫ ЛИДЕРСТВА ОТ ПРИКЛАДНОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОГО КОДИРОВАНИЯ

В.В. Золотарёв¹, Р.Р. Назиров¹, Г.В. Овечкин², П.В. Овечкин²

¹Институт космических исследований РАН, Москва, Россия
zolotasd@yandex.ru

²Рязанский государственный радиотехнический университет, Рязань, Россия
g_ovechkin@mail.ru@mail.ru

Анализируется ситуация, сложившаяся в прикладных исследованиях главной отрасли информатики - теории кодирования. Обсуждаются нерешенные проблемы классической алгебраической теории. Изложены основные методы реализации алгоритмов многопорогового декодирования (МПД), рассматриваемых как процедуры поиска глобального экстремума функционала с минимальной, т.е. линейной от длины кода сложностью. Из результатов сравнения возможностей этой Оптимизационной Теории (ОТ) с эффективностью прочих методов следует, что методы ОТ и МПД вместе с запатентованными нашей научной школой вариантами блочного алгоритма Витерби (БАВ) и новыми парадигмами развития теории помехоустойчивого кодирования полностью заменяют прочие методы декодирования по критериям лёгкости реализации, близости к границе Шеннона и результирующей достоверности.

Ключевые слова: помехоустойчивое кодирование, Оптимизационная Теория (ОТ), блочный алгоритм Витерби, самоортогональные коды, символьные коды, каскадные коды, многопороговые декодеры (МПД), энергетический выигрыш кодирования, канал связи, граница Шеннона

Помехоустойчивое кодирование используется для исправления ошибок, возникающих при передаче информации по каналам связи с помехами [1–3]. Для этого при отправлении исходного сообщения в него вносится некоторая избыточность (проверочная информация, полученная по тому или иному алгоритму), которая позволяет на принимающей стороне исправить значительную часть ошибок, возникающих при передаче этого сообщения по каналам связи.

Рассмотрим с общих позиций возможности алгоритмов, созданных для реализации методов достижения решений оптимальных декодеров (ОД) как задачи поиска глобального экстремума функционала (ПГЭФ) и классических методов, которые созданы в рамках алгебраической теории кодирования. Используем для этого данные, представленные в [4, 5]. При этом ограничимся, в основном, случаями использования моделей двоичного симметричного канала (ДСК) и канала с аддитивным белым

гауссовским шумом (АБГШ), которые в течение многих десятилетий считаются главным полигоном, на котором проводится сравнение лучших методов декодирования.

Одной из самых впечатляющих революций в технике декодирования для каналов с АБГШ в 70-х годах прошлого века, на начальном этапе развития теории кодирования, стал алгоритм Витерби (АВ) [6–9]. В этот период специалисты начали понемногу понимать, что никакие алгебраические методы, например, коды Боуза-Чоудхури-Хоквингема (БЧХ), Рида-Соломона (РС) и другие не смогут решить проблему эффективного простого декодирования при уровне шума, близком к пропускной способности канала. Это было время первого большого разочарования, когда выбранное интересное и важное сначала направление работ по созданию эффективных алгоритмов декодирования оказалось тупиковым. В тот момент и возникла надежда, что именно АВ и связанные с ним методы выведут исследователей на правильное направление поиска. Рассмотрим, каким образом за 50 лет разработок изменились возможности АВ и что вообще сейчас может предложить классическая теория кодирования.

На рис. 1 представлены вероятности ошибки на бит $P_b(e)$ различных алгоритмов декодирования в двоичном канале с АБГШ и ДСК, которые практически всегда являются одним и тем же физическим каналом. По горизонтальной оси на рисунке отложены отношения битовой энергетике канала к спектральной плотности мощности шума E_b/N_0 . Кривая « P_0 channel» указывает для выбранной кодовой скорости $R=1/2$ вероятности ошибки на бит в канале. Если в демодуляторе применяется, например, жёсткий модем, определяющий только знак принятых двоичных символов, то в декодер поступают значения «0» и «1» демодулированных битов, пришедших в этом случае из ДСК канала. А если в модеме приёмника перед декодером стоит аналого-цифровой преобразователь, то в этот декодер будут поступать, возможно, решения мягкого модема об очередном переданном бите, квантованные, например, на 16 уровней (4 бита). Это и будет двоичный канал с АБГШ, над проблемой эффективного декодирования в котором уже 25 лет особенно напряжённо работают специалисты всего мира с тех пор, как были открыты турбо коды [10]. Авторы турбо декодеров дали нам тогда уже вполне обоснованную надежду на то, что приемлемые по сложности декодеры для уровня шума канала, соответствующего непосредственной близости к границе Шеннона, т.е. когда $R \lesssim C$, создать всё-таки можно. Однако они оказались неоправданно сложными и нетехнологичными.

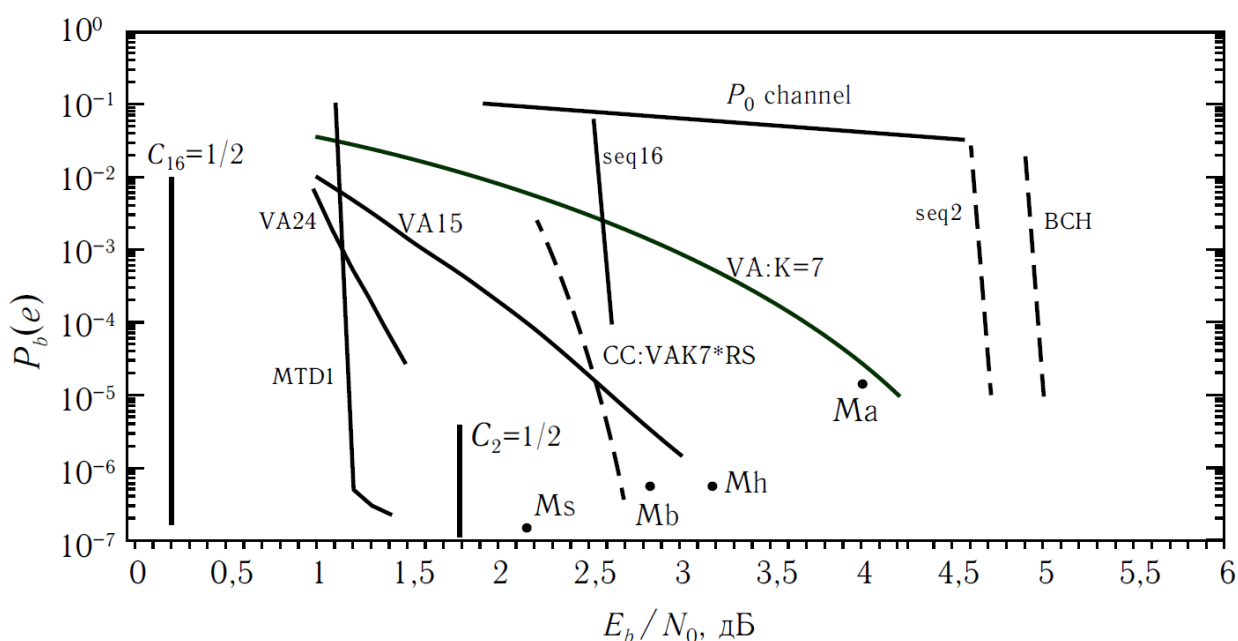


Рис. 1. Характеристики алгоритмов коррекции ошибок в ДСК и канале с АБГШ при $R=1/2$

Кроме того, на рис. 1 представлены вертикальные границы, отмечающие для ДСК и канала с АБГШ с 16 уровнями квантования уровни энергетика, при которых пропускная способность каналов равна $C=1/2$, помеченные как C_2 и C_{16} соответственно. График «MTD1» показывает наилучшие на данный момент реальные возможности многопорогового алгоритма (МПД), построенного на основе оптимизационной теории (ОТ) при использовании ПГЭФ, который при задержке решения не более 10 Мбитов и менее $I=200$ итераций декодирования может быть спроектирован и создан в виде, который обязательно может иметь теоретически максимально возможное быстродействие при аппаратной реализации [11, 12]. Способы достижения столь большой производительности МПД декодера были запатентованы [13–15]. Этот конкретный декодер работает, как и другие примеры декодеров на данном рисунке, при $R=1/2$. А совсем простой МПД с 45 итерациями, отмеченный точкой M_s , лучше каскадной схемы, состоящей из короткого сверточного кода, декодируемого с помощью АВ, и кода РС (кривая «CC:VAK7*RS») при всего лишь впятеро большей задержке решения по сравнению с ней. Развитие мягких МПД, их приближение к границе Шеннона и работа по снижению размеров задержки их решений будут продолжены. Отметим, что каскадная схема АВ-РС фактически является единственным прикладным достижением классической алгебраической теории, да и то лишь в каскадной схеме со свёрточным кодом. Можно ещё раз упомянуть методы Судана для кодов РС, реально послужившие развитию теории, но и они не имели практического значения.

Далее на рис. 1 приведены графики для свёрточных кодов длины $K=7, 15$ и 24 (графики «VA:K=7», «VA15» и «VA24»), где K – длина кодирующего регистра, для которых при их декодировании использовался алгоритм Витерби. Как следует из вида этих графиков, самый первый из декодеров АВ с $K=7$, созданный около 50 лет назад, гораздо слабее последующих. Но и АВ для $K=15$ также был впервые сделан ещё в прошлом тысячелетии для проекта НАСА «Кассини», причём для небольшой кодовой скорости. Таким образом, АВ для $K=15$ тоже является вполне реальным устройством. Разумеется, АВ для $K=24$ пока недоступен для реализации просто из-за экспоненциально растущей с K сложностью декодера. Здесь же показаны характеристики главной каскадной схемы АВ с $K=7$ и кодом РС [3, 8]. Это основные успешные и немногие реальные сейчас методы кодирования для гауссовских каналов. Характеристики конкретных низкоплотностных (LDPC) и турбо декодеров, которые сейчас относятся к реализуемым системам, детально обсуждались в [16, 17]. Там же перечислены их основные недостатки. Самым главным свойством этих алгоритмов, которое ограничивает их возможности, является то, что эти методы не измеряют расстояния своих решений до принятого из канала вектора. Таким образом, хотя эти декодеры весьма высокой степени сложности и относятся к итеративным процедурам, они не являются оптимизационными процедурами, а это не позволяет отнести их к перспективным методам кодирования. Этот их главный недостаток оказался возможным точно сформулировать только сейчас. Но и остальные ограничения, которые им свойственны, не позволяют сделать серьёзные ставки на их успешное развитие [17]. И поэтому их реальные возможности уже значительно отстали от достижений МПД алгоритмов, особенно при большом уровне шума.

На рис. 1 указаны также границы эффективности «seq2» и «seq16» для последовательных алгоритмов, которые так и не смогли преодолеть уровня вычислительных скоростей R_1 гауссовского и ДСК каналов, которые более чем на 2 дБ выше уровня энергетика канала при $R \lesssim C$. Таким образом, последовательные алгоритмы также уже очень давно не участвуют в конкурсе эффективных процедур декодирования для большого уровня шума канала.

Подчеркнём далее в связи с этим, что сейчас только все модификации МПД, а также свёрточные и блочные АВ точно измеряют расстояние своих решений до принятого сообщения. Мы объединяем все эти алгоритмы в группу декодеров прямого

контроля метрики (ДПКМ). Скорее всего, только на них и надо ориентироваться при разработке методов, которые позволят быстрее других достичь ещё более близких к границе Шеннона рабочих значений уровня шума при декодировании, чем это уже сделано сейчас. Разумеется, движение рабочей области алгоритмов МПД к этой границе будет продолжено, как это и было всё последнее время. А пока для гауссовских каналов, ДСК, символьных кодов и стирающих каналов наиболее высокие характеристики при очень умеренном уровне сложности обеспечивают только алгоритмы на базе ОТ и МПД, дивергентных принципов, простых приёмов каскадирования и реализации методов ПГЭФ [18, 20].

Как ещё одно полезное направление развития укажем также на то, что каскадирование АВ при $K \sim 15$ с символьными кодами, как видно из графика для АВ, возможно, могло бы обеспечить для этой схемы хорошие характеристики при $E_b/N_0 \sim 1$ дБ. Этот вопрос стоит детального рассмотрения, чтобы ещё раз оценить возможности, предоставленные теорией и современной элементной базой. Использование с этим АВ двоичных кодов тоже нужно изучать.

Рассмотрим возможности других алгоритмов в канале ДСК. Неконкурентность последовательных процедур, сыгравших в своё время определенную положительную роль в теории кодирования, мы уже отметили выше и увидели по граничным кривым для них на рис. 1. А возможности кодов БЧХ оказались крайне слабыми из-за того, что при росте длины кодов отношение кодового расстояния к длине кода d/n для этих кодовых структур быстро падает. И кроме того, в отличие от кодов с мажоритарным декодированием, декодеры БЧХ всегда ошибаются, если число ошибок в принятом блоке превышает $d/2$. Эти два серьёзнейших недостатка вместе со сложностью их декодирования, не доведённой до линейной от длины кода, приводят к тому, что граница для кодов БЧХ по энергетике лежит на рис. 1 даже дальше, чем для последовательных алгоритмов для ДСК. На это давно известное свойство кодов БЧХ указывалось в [3]. А поскольку алгебраическая теория кодирования не смогла решить задачу эффективного декодирования в гауссовских каналах, у неё не осталось никаких перспектив в решении реальных прикладных проблем, т.е. в создании эффективных декодеров для работы вблизи границы Шеннона [4, 5].

Далее точкой Ма на рис. 1 помечен результат 30-летней давности для крайне простого МПД декодирования при $E_b/N_0 = 4$ дБ для свёрточного кода с $d=11$ и $I=14$ итерациями декодирования [21]. Тем самым наглядно видно, что уже в те годы были полностью перекрыты все возможные достижения для кодов БЧХ и всех прочих методов алгебраической теории. Это однозначно определялось достижением МПД алгоритмом и в этом случае весьма малой энергетике канала типа ДСК уровня оптимального (т.е. переборного!) декодирования при всего лишь $I=14$ итерациях декодирования для довольно хорошего в плане размножения ошибок кода. Крайне странно, что наши теоретики совершенно не оценили тогда этот результат, который ясно указывал на завершение «классического» этапа теории кодирования.

При снижении энергетике ДСК при $R=1/2$ до ~ 3 дБ достижение высокого уровня достоверности декодирования тоже не составляет проблемы, если значительный рост задержки решения в блоковом или свёрточном вариантах декодирования до 1 Мбита признаётся допустимым. Эта достижимая для многих видов МПД декодеров и кодов точка отмечена рис. 1 как Мh. При отличии рабочей энергетике МПД от шенноновского уровня для $R=1/2$ в ДСК на ~ 1 дБ сложность и задержка МПД будут, как следует из стандартных оценок и экспериментальных данных, примерно в 1,5 раза меньше, чем у довольно не простого уже МТD1, что вполне естественно для столь большого уровня шума. Значит, и в ДСК у ОТ, МПД и методов ПГЭФ конкурентов вообще нет.

Таким образом, из комплексного обзора сведений об алгоритмах декодирования получается, что в гауссовских каналах пока что нет реально других перспективных алгоритмов, кроме МПД и АВ. Мы также обсудили, почему турбо и LDPC коды выпали из

конкурса перспективных алгоритмов. История последних 15 лет изучения декодеров этого типа, когда рост их эффективности прекратился, однозначно подтверждает наш вывод о слабых характеристиках всех алгоритмов, не относящихся к группе ДПКМ. В самом деле, достаточно сложно ожидать от алгоритма, который не измеряет расстояние своих решений до принятого вектора, успешного хоть в какой-то мере декодирования, тем более при максимально допустимом теорией уровне шума. В этих условиях методы для LDPC кодов могут вообще «не увидеть» достижение решения ОД, так как требуемые для этого замеры расстояния декодеры LDPC вообще не производят.

Столь же отрицательное и аргументированное отношение нашей научной школы к полярным кодам было нами изложено в [4, 16, 22] с использованием необходимых в этих случаях ссылок. Все классы этих и многих других методов кодирования последнее время безо всяких причин объявляются эффективными и перспективными при вообще полном отсутствии за прошедшие годы хотя бы одного-трёх примеров достижения каких-то разумных и проверяемых конкретных характеристик эффективности и сложности.

Мы полагаем, что полная текущая профанация теории и прикладных идей всей теории помехоустойчивого кодирования требует крайних мер в оценках характеристик публикуемых алгоритмов. Например, полезно всегда публиковать только те алгоритмы декодирования для классических моделей каналов связи, которые следует обязательно сопровождать заслуживающими доверия характеристиками эффективности и быстродействия, например, на языке C++. Это введёт в нормальное русло обучение студентов и специалистов, а также повысит уровень диссертаций по прикладным вопросам теории кодирования. Сделать это крайне важно, поскольку сейчас идёт просто настоящий поток монографий и защит столь «великих» докторских диссертаций, в которых нет вообще никаких графиков характеристик эффективности и производительности «новых» алгоритмов, а также каких-либо численных оценок их возможностей. Эти «опусы» переполнены десятками фрагментов псевдопрограмм, цена которых в миллионы раз меньше стоимости бумаги, на которой они напечатаны. Теория кодирования может быстро вернуть себе престиж самой важной отрасли теории информации, если российские специалисты, наконец, обратятся к разработкам, технологиям и прикладным исследованиям на базе современных теорий глобальной оптимизации функционалов [3, 4, 11, 16, 17]. Конечно, реально полезные исследования и других методов декодирования нужно всячески приветствовать и поддерживать. Однако наличие таких методов с эффективностью и сложностью, близкими к возможностям ОТ, пока что представляется весьма проблематичным.

Отметим кратко другие эффективные алгоритмы декодирования. В публикациях [11, 16] мы неоднократно отмечали, что символьные коды навели, наконец, в случайных недвоичных каналах полный порядок после 50-летнего застоя, случившегося после важнейшего для теории кодирования 60-х годов открытия кодов Рида-Соломона (РС). Но коды РС реальны только в своих коротких версиях. Использовать длинные коды РС нельзя, да и не надо, т.к. они тоже малоэффективны, а их декодеры неоправданно сложны. Ну, а больше ничего и нет. А символьные коды могут быть любой длины и даже при большом уровне шума декодируются оптимально, как это сделал бы недвоичный АВ, создать который для каких-либо не очень коротких недвоичных кодов, скорее всего, совершенно нереально. Уровень шума, при котором символьный МПД (QМПД) декодирует символьный код оптимально, в разы больше по вероятности ошибки канала, чем это могут позволить себе декодеры для кодов РС. Обширные данные по символьным МПД широко опубликован уже очень давно [3, 4, 17, 22]. Важно при этом и то, что для недвоичных кодов не существует сколько-нибудь эффективных алгоритмов Витерби, так как их сложность при больших q слишком велика [11, 16]. Таким образом, уже созданные системы с кодами РС должны работать, пока они нужны, а все новые задачи для недвоичных каналов следует решать с использованием исключительно символьных кодов, т.к. конкурентов у них теперь уже просто вообще не может быть.

В качестве примера высокой эффективности QМПД при очень малой избыточности, когда $R=19/20$, читатели могут переписать на свой компьютер демо программу для МПД (QМПД) блочного символьного кода по гиперссылке [23] со страницы «Обучение» сайта www.mtdbest.ru. Эта демо программа, как и все другие программные средства на наших порталах, сопровождается инструкцией, которая позволяет настроить ряд параметров декодера. Очень важно, что на самых обычных ПК производительность QМПД, как и алгоритмов для двоичных кодов достигает десятков Мбит/с, что отлично иллюстрирует огромное преимущество методов, созданных на базе ОТ, над другими методами декодирования.

Отметим ещё раз, что причина высокой скорости работы декодеров этого типа одна: единственный активный узел МПД – пороговый элемент, простейшее устройство. В случае аппаратной реализации в соответствии с теми же уже запатентованными решениями для ДСК и АБГШ каналов [13-15] символьный декодер также может обеспечить теоретически максимально возможную производительность для любой элементной базы, которая будет просто совпадать со скоростью продвижения данных по регистрам сдвига выбранной микросхемы или ПЛИС.

Таким образом, при наличии до недавнего времени работоспособной системы кодирования на базе только недвоичных коротких кодов РС (а в силу этого и малоэффективных) алгоритмы QМПД оказываются сейчас единственными реальными высокопроизводительными декодерами для недвоичных каналов со случайными ошибками. Они характеризуются высочайшей производительностью и способностью находить решения ОД даже в условиях очень большого уровня шума. Это означает, что ОТ полностью решила вопросы простого и высокодостоверного декодирования в недвоичных каналах и на сегодняшний день, и на перспективу.

Наконец, подчеркнём, что и в стирающих каналах запатентованные алгоритмы, идеологически относящиеся к МПД методам, на больших скоростях декодируют данные при $R=1/2$ и при вероятности приёма из канала стёртых символов $\sim 0,49$ снижают долю невозстановленных алгоритмом символов до уровня менее 10^{-6} [4, 17, 24, 25]. А недавно запатентованный нами АВ [26, 27] для блочных кодов (БАВ) со сложностью $\sim 2^K$, а не 2^{2K} , как умели делать буквально до недавнего времени наши теоретики, полностью исключает из конкурсов для гауссовских каналов вообще все алгебраические алгоритмы.

Таким образом, представленные выше результаты для всех основных типов каналов чётко свидетельствуют о безусловном и очень большом по всем параметрам эффективности и сложности преимуществе технологий и идеологии ОТ и МПД при решении задач теории кодирования, относящихся к исправлению, восстановлению, контролю и хранению цифровых данных в современных цифровых системах. ОТ успешно приняла эстафету во всех прикладных вопросах от классической алгебраической теории кодирования и выходит в новое бескрайнее интеллектуальное пространство оптимизационных алгоритмов, с линейной от длины кодов сложностью решающих все проблемы достижения оптимальной по максимуму правдоподобия достоверности цифрового контента нашей информационной цивилизации.

Мы полагаем, что число наших последователей и сторонников методов ПГЭФ, как и раньше, будет расти, а новые сферы исследований и разработок с использованием парадигм нашей новой «квантовой теории» в области помехоустойчивого кодирования, т.е. технологий ОТ и МПД, новых видов АВ декодирования, дивергентных и каскадных схем будет быстро расширяться.

Большинство ссылок, относящихся к этой статье, как и многие другие материалы по ОТ и МПД алгоритмам, в том числе множество демо программ, можно найти на наших сетевых порталах [22] и в нашей новой монографии [4]. Большое число ссылок на конкретные высокоскоростные демо программы и исследовательские платформы по ОТ и МПД также представлены в [4, 11, 17].

References

- [1] Zubarev Y.B., Ovechkin G.V. Error-correcting coding in digital communication systems, Telecommunication, Moscow, 2008, no. 12, pp. 2-11. (in Russian).
- [2] Channel Coding: Theory, Algorithms, and Applications [Text] / M. Fossorier, D. Declerq, E. Biglieri and others. – Academic Press Library in Mobile and Wireless Communications, Elsevier, 2014. – 690 p.
- [3] Zolotarev V.V., Ovechkin G.V. Error-correction coding. Methods and algorithms. handbook, Moscow: Hot line – Telecom, 2004, 124 p. (in Russian).
- [4] Zolotarev V.V. Coding theory as global extremum search task // Under scientific edition of member of the Russian Academy of Sciences N.A. Kuznetsov. 2dn edition. M., Hot line – Telecom, 2018, 228 p.
- [5] Zolotarev V.V., Zubarev Y.B., Ovechkin G.V. Optimization Coding Theory and Multithreshold Algorithms // Geneva, ITU, 2015, 159p. (E-book: <http://www.itu.int/pub/S-GEN-OCTMA-2015>).
- [6] Forney G.D. Convolutional codes. II. Maximum-likelihood decoding // Information and control. – 1974. – Vol. 25, No. 3.
- [7] Heller J.A., Jacobs J.M. Viterbi decoding for satellite and space communication // IEEE Trans. on Comm. Technology. Part II. – 1971. – Vol.COM-19, No. 5.
- [8] Clark, George C., Jr., and J. Bibb Cain. Error-Correction Coding for Digital Communications. New York: Plenum Press, 1981.
- [9] Viterbi A.J. Error Bounds for Convolutional Codes and an Asymptotically Optimum Decoding Algorithm, IEEE Trans., 1967, IT-13, pp.260–269.
- [10] Berrou C., Glavieux A., Thitimajshima P. Near Shannon Limit Error-Correcting Coding and Decoding: Turbo Codes // in Proc. of the Intern. Conf. on Commun. (Geneva, Switzerland). – 1993. – p.1064–1070.
- [11] Zolotarev V.V., Ovechkin G.V., Chulkov I.V., Ovechkin P.V., Averin S.V., Satibaldina D.Zh., Kao V.T. Review of achievements in the optimization coding theory for satellite channels and Earth remote sensing systems: 25 years of evolution, *Sovremennyye Problemy Distantionnogo Zondirovaniya Zemli iz Kosmosa*, 2017, vol.14, no.1, pp.9-24. DOI10.21046/2070-7401-2017-14-1-9-24.
- [12] Zolotarev V, Ovechkin G., Satybaldina D., Tashatov N., Adamova A., Mishin V. Efficiency multithreshold decoders for self-orthogonal block codes for optical channels // International Journal of Circuits, Systems and Signal Processing. ISSN 1998-4464. – 2014. Vol.8. pp.487–495. [http](http://www.ijcssp.com)
- [13] Patent №44216 RF. High throughput unit for multithreshold decoding of linear codes / Zolotarev V.V., Opubl. 2004. (in Russian).
- [14] Patent №2377722 RF. A method for error-correction code decoding. Zolotarev V.V., Opubl. 2009. (in Russian).
- [15] Patent №492878 RF. The unit for linear convolutional code decoding. Zolotarev V.V., Opubl. 1972. (in Russian).
- [16] Zolotarev V.V. About new age of optimizing theory development, *Digital signal processing*. 2017. №1. pp.33–41. (in Russian).
- [17] Kuznetsov N.A., Zolotarev V.V., Ovechkin G.V., Nazirov R.R., Averin S.V. Multithreshold algorithms based on optimizing theory near Shannon bound, Some aspects of modern problems of mechanics and informatics. M.: Space Research Institute, 2018. pp. 99–120. DOI: 10.21046/aspects-2018-99-120.
- [18] Zolotarev Valery, Ovechkin Gennady, Satybaldina Dina, Tashatov Nurlan and Egamberdiyev Eldor. Divergence coding for convolutional codes, MATEC Web of Conferences 125, 05009 (2017), CSCC 2017. DOI: 10.1051/mateconf/20171250

- [19] Zolotarev V., Grinchenko N., Lotsmanov A., Ovechkin G. Developing the Principle of Divergent Coding for Gaussian Channels, 7-th Mediterranean Conference on Embedded Computing MECO'2018, Budva, Montenegro. DOI: 10.1109/MECO.2018.8405964
- [20] Zolotarev V.V., Ovechkin G.V., Ovechkin P.V., Egamberdiyev E. Usage of divergence within concatenated multithreshold decoding convolutional codes // Proc. of int. conf. «Advances in Wireless and Optical Communications (RTUWO)», 2017. DOI: 10.1109/RTUWO.2017.8228516
- [21] Zolotarev V.V. Multithreshold decoding, *Problems of data transmission*. M.: 1986. vol.XXII, issue 1. pp.104–109. (in Russian).
- [22] Web sites www.mtdbest.iki.rssi.ru and www.mtdbest.ru.
- [23] http://www.mtdbest.ru/program/qmtd_demo_r.zip
- [24] Patent №2611235 RF. The method of detecting and recovering erasures at receiving of discrete information / Zolotarev V.V., Opubl.: 2017. (in Russian).
- [25] Grinchenko N., Gromov A., Ovechkin G. Improving performance of multithreshold decoder over binary erasure channel, 6th Mediterranean Conference on Embedded Computing, MECO 2017 - Including ECYPS 2017 DOI: 10.1109/MECO.2017.7977234.
- [26] Patent №2608872 RF. The method of encoding and decoding for block code with using of Viterbi algorithm / Zolotarev V.V., Ovechkin P.V. Opubl.: 2017. (in Russian).
- [27] Zolotarev V.V., Grinchenko N.N., Ovechkin G.V., Ovechkin P.V. Modified Viterbi algorithm for decoding of block codes, 2017 6th Mediterranean Conference on Embedded Computing, MECO 2017 - Including ECYPS 2017. DOI: 10.1109/MECO.2017.7977250