(Partially automated translation – see our autumn-23 greeting)

Optimization Theory solved Shannon's problem. The old coding theory is complete. Our prospects

V.V. Zolotarev
SRI RAS, Moscow

Abstract. All the main results of the Optimization Theory (OT) of noise-resistant coding obtained **during 50 years** are considered. It is shown that **OT completely solved the Shannon's problem** for all classical channels and for another 40 years it replaced the previous CT coding theory in all applied aspects. It is indicated that OT algorithms provide the best possible characteristics according to a single quality criterion of error correction algorithms NVC≡"noiseproofness-veracity-complexity". Decoders created using OT technologies have the best even theoretically possible characteristics. The simplest practically optimal decoders from are built on the basis of methods and technologies of the theories of the search for the global extremum of the functional (SGEF).

Our also patented block versions of the Viterbi algorithm (BVA) also have the minimum complexity at the moment corresponding to the convolutional VA.

Keywords. — Shannon boundary, Optimization Theory (OT), channel capacity, binary symmetric channel (BSC), complexity of algorithms, search for global extremums of functionals (SGEF), NVC criterion, optimal decoding (OD), Viterbi block algorithm (BVA), coding theory (CT), multithreshold decoders (MTD), parallel concatenation, divergence, decoders with direct metric control (DDMC).

1. Introduction.

In 1948, K. Shannon wrote one of his best works [1], which marked the beginning of the development of the theory of noiseproof coding. However, we believe that after useful results of 1960 in algebraic theory and the invention of the Viterbi algorithm (VA) for convolutional codes in 1967 [2] in subsequent years and up to the present time, **there were no significant applied achievements in coding theory (CT)** that would lead to solving the problem of efficient decoding in noisy channels near the border of their bandwidth. To date, our scientific school of a fundamentally new theory of noise-resistant coding has published **11 monographs,** as well as 4 more books and **2 reference books** that provide a complete solution to all applied problems of coding theory with error correction, based on fundamentally different methods, namely, technologies and theories of searching for global functional extremes (sGEF), which we called Optimization Theory (OT). **Below it is a complete presentation of the entire OT**, which was published in 2006 in the Russian Federation in a monograph [16], and also described in detail in English in books [3-5]. We also offer our new monograph of 2021 for detailed study [17]. All of them are freely available [8] and, like all articles with our main results, are **easily accessible by hyperlinks**. If necessary, we will also indicate specific page numbers in these publications.

All basic OT algorithms have a minimum **complexity N that increases linearly with the code length n, N~n.** And at the same time, **our methods do not differ in reliability from the characteristics of the optimal** (**with a total search**!!!) **decoding (OD).** Decoders created by OT methods also retain these properties directly near the Shannon boundary, which, as is known, is absolutely elastic, as a result of which it is completely unattainable, as is the speed of light for material bodies.

And pay attention! Although we have published software from almost everything and even for a very long time, we are still leaders, to the level of which no one has reached! Why? The whole world has remained **at a distance of 15÷25 years** from us, and perhaps even more **(?)**. Our system is completely different from the previous unsuccessful and extremely "mathematical" CT, which, however, has not learned to count anything important and useful for the design of decoders. Therefore, we believe, like many of our most qualified colleagues, that **our OT** is indeed a great world achievement of Russian science, absolutely and unconditionally **worthy of the Nobel Prize**. Well, the **fact that we won't get it is absolutely unimportant (?)**. Nevertheless, it is only we who have created all the conditions so that our digital information civilization can always conveniently, simply and quickly create, transmit, store and control, and if necessary, restore all its highly reliable information, which, as we very much hope, will be used only for the benefit of humanity.

And we are confident that our decisive contribution to the very successful solution of all problems of reliability in digital exchange **will never be forgotten by the scientific community.**

Only for the sake of brevity of the main idea of the new applied coding theory (CT), as we call it "quantum mechanics" of information theory – our OT - we omit all pictures and graphs with the characteristics of algorithms here, because this article is exclusively of a system-philosophical nature. In the case of your first acquaintance with OT, we recommend that you have **our scientific-popular booklet [5] or its English counterpart [5a]** nearby at the same time with this article. It is very important, as well as many serious references to strict monographs on the subject of OT, also placed in it. But still, we suggest focusing more on the actual text of this article, which helps to understand the revolution of scientific thought in the field of applied CT that took place **~40 years ago**. However, it is still completely ignored by almost all the "servants of science", who should have already perceived this extremely unexpected turn of the most important science of the digital world right then and brought it home to thousands of implementations in hardware and software. This situation seems even more strange if we point out that the new CT has become approximately 1000 times more compact and, of course, extremely simple. Moreover, even a cursory review of all, especially the latest books on OT, shows that there are very few formulas in our OT, whereas all the mathematical expressions necessary for estimating and forming the boundaries of the parameters of coding systems are always in the right places everywhere. This should even more convince all researchers and future creators of digital data transmission and storage systems that this is indeed a fundamentally new philosophy in information theory. And all the consequences that follow from it, technologies, mathematical results and the possibilities of surprisingly simple, but incredibly effective algorithms are only the consequences of the formation of a truly completely new philosophy in applied coding theory. So first we suggest turning specifically to the study of this text, the system-philosophical meaning of which will determine the development of the entire modern applied CT for many years to come. And specific numerical results for OT algorithms, as well as for others, including non-our methods, are always available to all specialists in hundreds of our publications, reviews and monographs ***for more than 50 years.*** But they are already concrete consequences of a new and unusual, although now not very young philosophy.

So, may be, is it time to put it into practice? For example, in remote sensing, in "drones", in satellite communications, and in the Space, finally!?!

So, let's get started!

2. The initial situation. The First Revolution.

We should immediately note that English analogues of this article, similar in content, are published in [27] at five pages and in [28] - on 4. They are even more concise and also useful. Their perception will be more difficult due to their extreme compactness. But –read them!

As you know, the previous coding theory (CT) is not able to calculate any parameters of a single NVC criterion at a high noise level. This means that for 60 years of its existence, that CT has done nothing to solve the Shannon’s problem. It follows that **CT is not a mathematical problem at all**. It is a pity that the theorists did not agree with this! Perhaps none of them are familiar with such publications as [5, 21], from which it follows that analytically presented results for large-scale scientific problems almost never exist. There is a rigid philosophy in science, based on millennia of experience: **only the simplest tasks have answers in the form of formulas.**

Let's consider the initial situation with which it all started in OT. Let's describe the most important properties of the digital system and codes. **They were proved by us ~50 years ago**. But a full understanding of the theoretical and experimental results we have obtained over the years, including new paradigms of OT, almost 40 patents, ~100 "know-how" and the properties of SGEF methods for real meaningful CT, i.e. for our OT, can come to some specialists only after long and painstaking work with our monographs. However, we **emphasize** that our results are quite unexpected, **but they are always extremely simple!**

So, we drew attention to the fact that for any linear binary system convolutional or block (n,k) code C, defined by its verification matrix H, which, for example, was used to transmit over the BSC channel some message of length n, received by the decoder as $Q=(Q_k,Q_r)$, , r=n - k, and for an arbitrary code word of this code $A=(A_k,A_r)$, represented by their information and check parts, **Lemma 1** holds:
For the selected code, there is a ratio:

$$(A+Q)=(D,H^*(D+Q_k,Q_r)), \qquad (1)$$

where $D=A_k+Q_k$ is a vector of length k. The meaning of the lemma is that the component-by-component difference (in the binary case it is also the sum) of vectors A and Q is determined by the difference vector D of length k and the result of multiplying the test matrix H by the vector (A_k,Q_r).

Let's denote this multiplication result as a vector S. Then the expression (1) in the lemma is briefly written as

$$(A+Q)=(D,S). \qquad (2)$$

In OT is the **Lemma 1** [3, 4, 16, 17]. It is clear that if $A_k=Q_k$, then the result of such a calculation is the usual syndrome of the accepted vector Q [3, 4, 13, 16]. It follows that by changing D, they can find the minimum weight of the sum $|(A+Q)|$. Then the corresponding vector A will be the desired solution of the optimal decoder (OD). But this is a difficult way.

Let's look at a simpler solution next. Let the C code also be a majoritarily decoded self-orthogonal code (SOC) with a code distance d=2t+1 [4,14,15]. Let the threshold element (TE) in the corresponding threshold decoder, as in the usual decoder of J. Massey[13], always sums up J=2t code checks, but at the same time also adds to this sum the component d_j of the difference vector D, which refers to the next decoded character i_j of the received message. This means that the total number of checks received at the TE inputs is d. Let TE change the symbol i_j, all 2t checks of the syndrome vector and the symbol d_j if this total sum of d checks at its inputs is greater than d/2. But if this happens for some initial vector A_1, then, obviously, the sum of all d checks for TE will become less than d/2, and the set of new vectors (D_2,S_2) with checks changed due to the correction of the symbol i_j and the symbol d_j will become the difference already for vectors (A_2+Q). This means that with the change of the symbol i_j, a more plausible vector A_2 was found, and the new state of vectors A_2, D_2 and S_2 again corresponds to **Lemma 1**. And, therefore, it is possible to decode the following characters again, and many times in accordance with this rule, so that with all changes in the controlled characters, such a multithreshold decoder (MTD) will always move to more and more strictly plausible solutions. These are the absolute and complete solution to Shannon's problem. **This means that the whole coding theory (CT) as a problem is thus absolutely completed.** Further - ***already*** ***only the technologies of the scientific school OT.*** So it is almost impossible to calculate anything in real applied CT, i.e. in our OT when it estimates any decoders ! Almost everything else is **the tasks of computational mathematics**, its very powerful section of **the searching for global extremes**. And with such intentions, experience and goals – come to us! **This is our OT.** We ask you to love and favor!

In OT, this is a *simple key and immediately final mathematically formulated solution* - **the Main Theorem of Multithreshold Decoding (MTMTD),** since MTD can have many attempts to correct characters, i.e. iterations, up to I ~ 50 ÷ 200. And here they can immediately apply many new technologies.

Further, since in the SOC the nearest code words differ only by one information symbol, in the BSC, as the experiment also quite clearly showed, for the OD, the achievable lower estimate of the error probability per $P_b(e)$ bit is naturally determined by the simplest binomial distributions for the occurrence of more than d/2 errors for the decoded symbol in those d positions in which two such code words differ [3, p. 249; 17, p. 242]. No other algorithms have such useful and understandable properties. With a small probability of error in the BSC, as the simplest experiments showed many years ago, the solutions of the MTD actually do not differ at all from the OD already for I = 2 [4,16]. But for now, just recall that the purpose of OT is highly reliable decoding near the Shannon's bound, at a very high noise level, i.e. with a high probability of error in the BSC.

When switching to a binary Gaussian channel (AWGN), for example, at M = 16 quantization levels of the input signal for the decoder, the limiting capabilities of the MTD are improved in the same way as in the case of VA, by ~2 dB, which, of course, is a very significant value. In such an MTD, when decoding, the TE calculates already weighted sums of checks with small integer coefficients. For this channel, which is the most important in practice, the complexity N of the MTD also remains linear with respect to the length of the code n, and the reliability result is the same as for the OD [3, p. 249; 17, p. 242].

Why is the Shannon problem theoretically completely solved already at this stage for the binary channels of BSC and AWGN? According to the NVC criterion, the complexity of the MTD algorithm is proportional to n, namely, does not exceed N=2nIRd, and all operations are only the simplest additions and comparisons for small integers. And the reliability, as noted above, even with a significant noise level corresponds to the level of OD for SOC codes. This became clear in ~1975 from the very first modeling experiments. But in those years, in principle, there was simply no experimental basis for creating really powerful decoding methods, because computers were too slow at that time, and the **CT problem** – let's repeat this – **was not a purely mathematical problem at all.** It almost immediately becames computational, optimizational, for which only the limits for the permissible values of decoder parameters were known.

Recall once again that even now no one knows how to calculate any error probabilities of a particular decoder of good long codes at a high noise level. This means that modeling alone is always the only way to determine the final validity of complexity decoding (!) a specific algorithm in the CT. So, firstly, we found that from the point of view of complexity and reliability, the MTD immediately has theoretically the best parameters of the NVC criterion with a small relative noise level. But how to improve the main parameter here - noise immunity, i.e. the distance of the MTD working area to the Shannon's bound?

3. The theory of error propagation. The Second Revolution

This problem was also solved only by our scientific school OT, but only after the creation of a complete theory of error propagation (EP) for majority decoded codes [4, 16]. And then, in a few years, software was developed to search for codes with an extremely low EP level. In such codes, with one of the ways to solve the EP problem for all possible pairs of checks, the number of which has the order $(nR)^2/2$, the total number of common checks in all such pairs of checks is brought to the minimum possible number. It is precisely such codes with low exposure to the EP effect that have now allowed all the capabilities of the MTD to manifest in all their splendor. And besides, over time, the speed of computer modeling has gradually increased significantly. This has greatly increased the effectiveness of our research, which **dynamically uses the possibilities of both fine theory and large-scale experiment.**

Other software packages of our school now provide a demonstration of noise immunity, reliability, complexity and parameter settings of MTD algorithms. Many years ago, they also almost immediately demonstrated in various experiments the best possible, even theoretically, characteristics of the MTD, including near the Shannon's bound [3,17]. This software created by us has remained the only way to determine the parameters of any decoders of the OT school at high relative noise levels according to the NVC criterion. There are no other methods, and for a long time, and most likely, **there will never be at all!**

MTD in accordance with these completely objective parameters are always the best according to the triune criterion of NVC, if the codes are selected in accordance with the requirements of the theory of EP [4, 16].

It is important that the complexity of MTD methods is almost always several orders of magnitude less than that of other algorithms [3,6,7-10]. And in order for all researchers to be able to correctly compare the complexity of decoding methods, we have created calibration programs in C++, which are available on our portals for everyone [8]. This allows, for example, on a computer with a Core-i7 processor and a clock frequency of ~3 GHz for a code with d~9 at I= 10, to perform optimal decoding of the MPD-based SOC in a Gaussian channel at a speed of ~ 6 Mbit/s without using any additional methods, for example, parallelization. In fact, this example shows the speed of the MTD, which performs ~ 100 simple operations of addition and comparison of integers when decoding each character of the code. Hence, the recalculation of the MTD performance by another number of iterations I and the values d of the code distance is obvious. These calibration tools allow specialists to compare the speeds of different decoders very accurately.

But the most important property of OT algorithms is that the MTD always accurately measures the distance of the entire sequence of its decisions to the received message. This means that the MTD is an algorithm for searching for the global extremum of functionals (SGEF) in arrays with self-correction properties and with an exponentially growing set of potential solutions. And the choice of code with a small number of errors actually became the only technological contribution of the former CT to the theory of OT and to the tasks of global optimization of functionals. And the problem of achieving OD is currently being solved by methods of various theories of the search for the global extremum of functionals (SGEF), for which many software packages based on these theories have been developed [3, 17]. Optimization is carried out according to many parameters of the MTD: the values of thresholds in TE, the weights of checks, etc. And then the actual modeling of the MTD is performed, when in a few minutes all the parameters of the NVC criterion are usually determined, which usually turn out to be the best possible. But so far we have considered only the BSC and the Gaussian channel. We emphasize that here the characteristics of the MTD according to the NVC criterion have long been out of competition [3, 5, 7, 8, 17].

4. Erasing channels.

Let's turn to channels with erasures (ErsC) [3,4,17]. In OT, estimates of the probability of non-recovery of the first character in the MTD for SOC codes in ErsC are proposed, as well as equally simple and achievable estimates of the probabilities of errors per character for OD, which do not even need to be output. The essence of the MTD algorithm, for example, for convolutional codes in this channel, which is much simpler than even for BSC, is that the decoder quickly looks for situations when there is a single erased information symbol in the check, which in this case is immediately decoded by solving the simplest equation a+**x**=b, where **x** is the desired but unknown value of the information symbol. **And that's all!**

The lower estimate for the probability of non-recovery of the erased symbol in the channel is simply and very quickly achieved by the MTD algorithm, even directly near the bandwidth of the channel [3,5]. It is also very easy to output for "one-touch" codes [3, 5, 17]. The algorithm was **first published in 1983**. Its complexity N is also linear with respect to n, and it also allows making decisions with the same confidence as OD [3, 17]. including at the Shannon's bound for these channels. This is absolutely the end of all research in ErsC – the easiest channel with erasures for efficient and fast optimal decoding (OD). This task is almost educational. And the enormous number of "methods" of decoding in such a channel is extremely surprising for us, while the simplest, even trivial our decoding method almost immediately gave an absolutely perfect result.

5. Symbolic (non-binary) codes. The Third Revolution

The MTMTD theorem, as well as the EP theory, were the most important results of OT and allowed the school to create MTD decoders that, according to the NVC criterion, provide the best results even theoretically, even with the maximum possible relative noise levels in the Gaussian and erasing channels. These **two results are considered by some experts** as **truly Nobel achievements in the digital world**. And in fact, nothing comparable to the MPD algorithms according to the NVC criterion is unknown to the scientific school from. The leadership of OT and MTD methods for these codes is completely unprecedented.

But the OT scientific school also has **a third**, no less, and perhaps even more important **achievement of such a Nobel level**. By **~1985**, we eliminated the ***60-year-old crisis (!) in decoding algorithms for non-binary codes***, which is ***still ongoing***. To encode non-binary data so far (except for the OT methods!), only short and therefore very weak Reed-Solomon codes (RS) available to engineers can be used.

And the OT school adapted **Lemma 1** about vectors in BSC for random errors in q-ary symmetric channels (qSC) to such non-binary channels as well. And according to this new **Lemma 2**, the equality is valid for the q-ary channel and non-binary codes

$$(A–Q)=(D,S),$$

where the "–" sign corresponds to the usual component-by-component subtraction, for example, in any additional group, for example, modulo q [3, 4, 13, 16, 17]. And based on this new **lemma**, an **extremely simple qMTD algorithm** was created for non-binary majoritarian decoded codes, which we called **symbolic codes**. This algorithm also strictly converges to the solution of OD and has linear complexity N with respect to n: N~n [3, 4, 5, 16]. Such a complete and "instantaneous" even theoretically the best possible decision for decoding symbolic codes, which has no equal among others [18, 19], immediately solved all the problems for non-binary codes after more than half a century of stagnation.

The lower simple achievable estimates for symbolic OD are presented in [3,4,16,17]. Modeling has shown that the really optimal decoding (OD) at a very high relative noise level of the qSC channel is implemented quite simply, and for the error probabilities of the qSC channel many times higher than those at which the RS codes are somehow still operable, which are - again, - weak because they are usually short.

Symbolic MTDs are many orders of magnitude faster, more efficient and simpler than all other methods [8-11,20]. With this, we can finally complete the presentation of all the basics of the new complete OT, based on the theories of the SGEF, the qMTMTD theorem and the theory EP, combined into a single theory by the unique resources of our innovative software.

From the portals [8] you can download an informative color cartoon with very simple instructions for the user https://decoders-zolotarev.ru by hyperlink [23]. It demonstrates the MTD decoder the achievement OD decision even for a not yet very long code in a BSC with a fairly high noise level. With each correction of the symbol, as shown by the work of the MTD in the cartoon, the decoder strictly improves its decision in accordance with the MTMTD theorem, making them more and more plausible and thereby approaching the decision of OD, and then achieving it.

Let us recall again that qMTD for symbolic codes was created more than 30 years ago, but even now, after the full publication of this algorithm and with freely available qMTD modeling programs, it has been 60 years since the invention of RS codes until now, no one has even been able to repeat it, that is extremely strange for such an important for technologies and applications of the applied CT field. It is possible that this is partly due to the extreme neglect of almost all "specials" who believe that they are engaged in coding theory, experimental moments of following and, which is also quite real, a strong drop in the level of programming in the modern world, which has passed the point of maximum in the level of its intelligence, hopefully (?), still the maximum local.

6. The role of optimization theories in OT

Understanding OT as an optimization problem has allowed us to create many new paradigms that further improve the convergence of solutions of all types of MTD to OD. This is a divergence that increases the distance between codes using methods unrelated to concatenation [3,17,24,25], decoders with direct metric control (DDMC) [17], as well as parallel concatenation [3,17], etc.

Our new solutions for Viterbi block algorithms have also significantly simplified the decoding of short block codes [12, 17, 26]. Our patented block VA has the same exponent of complexity as convolutional VA, while for a number of other block published OD decoders, the complexity corresponds **to a doubled exponent [5, 17] (!).** It is here the time to say also that it is important to recall the long-known opinion that the role of optimization theories in mathematics is as great as the role of mathematics itself in science.

7. About decoding methods at a high noise level

In the near future, with a high relative noise level, most likely, no analytical theoretical results will be obtained for specific error correction methods. **This is extremely difficult**, which was proved by all the 60–year experience of the relative activity of the previous CT, which ***quietly left the fields of computer sciences ~40 years ago.***

By the way, the problem of polar codes [22], which we have considered in detail and repeatedly in our various reviews, has become a complete and extremely noisy catastrophe of the previous format of the theory, showing its futility, inefficiency and absolute lack of evidence in all aspects, at least in the clumsy speeches of our Russian "magicians" about "polar". The complete inability of our "specials" in codes to engage in programming and modeling also aggravated the huge problems of this absolutely dead-end direction of ideas in the CT.

Thus, real further results on approaching the Shannon’s bound are still possible only in terms of technological optimization and settings. The main role here has already been successfully played by such important paradigms of OT as the divergence principle, which implements methods of increasing the code distance unrelated to cascading, decoder element tuning technologies, parallel cascading methods, as well as the principle of decoding with direct metric control (DDMC) and some other technologies discussed in [3, 4]. All of them made it possible to further approximate the area of effective operation of the MTD at the Shannon’s bound, preserving linear complexity and achieving reliability of the OD for the codes used.

We emphasize that these so important results were obtained in the process of **unified development of a fine logical theory and large-scale experimental**

innovation based on hardware and software design and modeling of MTD algorithms, as well as on expanding the area of decoder parameter optimization by means of additionally created special software focused on the search for extremums of functionals in the space of digital arrays with the properties of self-correction of possible errors. And at the same time, as we understand, **all these issues have not even been formulated as current tasks** of applied information theory **by any scientific group in the world**.

8. About comparing algorithms

All MTD methods perform only operations with small integers, and also have the best parameters of the NVC criterion in aggregate and separately. It is clear that it directly follows from this that the hardware and software versions of such decoders have the highest performance, including on FPGAs, which we have already discussed for binary codes. Symbolic MTDs also have excellent performance. In an hour, such a decoder on a Core-i7 processor can ***collect statistics with a volume of ~10^{10} bits***, and sometimes a few more [3, 9, 17]. At the moment, ***there are no methods comparable to our algorithms according to the NVC criterion and for non-binary codes either***.

Our reviews on the issues of applied CT, i. e. our OT, can be found in [8, 22]. However, they cause disagreement with us among some individuals who do not follow the results and technologies of the OT scientific school. We remind you that our work has received the award of the Government of the Russian Federation in the field of science and technology. The network portals of our school are sometimes visited by up to 100 thousand readers a year [5, 17]. We have also been awarded the EU Gold Medal "For Exceptional Achievements" in Science. And we were awarded the Gold Medal of the International Salon of Inventions for the super-fast MTD decoder on the ALTERA FPGA, created at the SRI RAS according to the patent of the OT school and earned back in 2007 ***at a speed of more than 1 Gbit/s.***

9. Conclusion.

The OT school has completed the creation of the best algorithms according to the NVC criterion in all classical channels considered in the applied CT. It is extremely difficult to significantly improve our results according to the PDS criterion. **The task set by Shannon was completely successfully solved theoretically even before 1985,** and all the various experimental tests of methods and technologies from our new "quantum mechanics" in information theory ended with complete success and were crowned with an unconditional triumph even **before 1995**. Since then, up to the present time, OT research has been expanding, aimed at further developing OT technologies, simplifying the design of MTD

decoders and new modifications of Viterbi algorithms, reducing decision delays and further increasing the speed of our decoders.
The ultra-complex **work of the undoubtedly Nobel level has been successfully and completely completed** for all traditional types of communication channels in the applied CT.

Proposals for the further development of OT technologies were made by us in [3,5,17]. Of course, they will continuously expand and deepen. We offer everyone our unconditional support in mastering applied OT achievements.

Literature

1. Shannon C.E. A Mathematical Theory of Communication. Bell System Technical Journal, 1948, Vol.27, P.379–423, P.623–656.

2. Viterbi A.J. Error bounds for convolutional codes and asymptotically optimum decoding algorithm. IEEE Trans. Inform. Theory, IT-13, N.2, 1967, P.260–269.

3.. В.В. Золотарёв. Теория кодирования как задача поиска глобального эксстремума. Под научной редакцией академика РАН Н.А. Кузнецова // М., "Горячая линия - Телеком", 2018, 220 с.
URL: https://decoders-zolotarev.ru/wp-content/uploads/2021/10/kniga-2018-pro-globalnyj-poisk.pdf . .

3а. (Английской аналог) - Zolotarev V. Coding Theory as a Simple Optimal Decoding near Shannon's Bound (Optimization Theory of error-correcting coding is a new “quantum mechanics” of information theory) // Moscow, Hot-Line Telecom, 2018, 333 p. URL: https://mtdbest.ru/articles/mtd_book_2019.pdf. **(Eng)**

4. Zolotarev V., Zubarev Y., Ovechkin G. Optimization Coding Theory and Multithreshold Algorithms. Geneva, ITU, 2015, 159 p.,
URL: https://mtdbest.ru/articles/Zolotarev_ITU.pdf. **(Eng)**

5.. *Кузнецов Н.А., Золотарёв В.В., Зубарев Ю.Б., Овечкин Г.В., Назиров Р.Р., Аверин С.В.* Проблемы и открытия Оптимизационной Теории помехоустойчивого кодирования (ОТ в иллюстрациях) // М.: Горячая линия - Телеком, 2020, 36 с.
URL: http://www.mtdbest.ru/articles/comics.pdf. (Рус)

5а. (английский вариант) - Kuznetsov N.A., Zolotarev V.V., Zubarev Yu.B., Ovechkin G.V., Nazirov R,R, Averin S.V. Problems and Discoveries of the Optimization Theory for Coding near Shannon’s Bound (OT in
illustrations). Moscow: SRI RAS, RSREU, 2020, 45 p. **(Eng)**
URL: https://mtdbest.ru/articles/e-comics.pdf.

6. Zolotarev V.V., Ovechkin G.V., Chulkov I.V., Ovechkin P.V., Averin S.V., Satybaldina D.Zh., Kao V.T. Review of Achievements in the Optimization Coding Theory for Satellite Channels and Earth Remote Sensing Systems: 25 Years of Evolution. // "Current problems in remote sensing of the earth from space", 2017, Vol.14, No.1, P.9–24.
URL:https://mtdbest.ru/articles/ERSS_2017.pdf. **(Eng)**

7. Zolotarev V.V., Ovechkin G.V. On the Prospects of Optimization Theory // 22th International Conference on Digital Signal Processing and its Applications (DSPA), Moscow, Russia, 2020. URL: https://mtdbest.ru/articles/Zolotarev_90_Final.pdf. **(Eng)**

8. Web-sites: www.mtdbest.ru , www.decmtdzol.ru , https://decoders-zolotarev.ru.

9. Кузнецов Н.А., Золотарёв В.В., Овечкин Г.В., Овечкин П.В. Недвоичные многопороговые декодеры и другие методы коррекции ошибок в символьной информации // Радиотехника, №6, вып. 141, 2010, с. 4–9.
URL: https://mtdbest.ru/articles/Zolotarev_radiotechnik_2010.pdf . (in Russian).

10. Zolotarev V., Ovechkin G., Seitkulov Y., Satybaldina D., Mishin V. Algorithm of Multithreshold Decoding for Non-Binary Self-Orthogonal Concatenated Codes // 8-th International Conference on application of information and communication technologies. 15-17 October, Astana, Kazakhstan. 2014. URL:
https://decoders-zolotarev.ru/en/wp-content/uploads/2020/11/algorithm_of_qmtd.pdf .

11. Averin S.V., Zolotarev V.V. Non-Binary Multithreshold Decoders with Almost Optimum Performance. Proceeding of 9-th ISCTA’07 16-20 July 2007, UK,
URL: https://decoders-zolotarev.ru/en/wp-content/uploads/2020/11/qmtd_iscta07.pdf .

12. Zolotarev V.V., Ovechkin G.V., Ovechkin P.V. Modified Viterbi Algorithm for Block Code Decoding. 6th Mediterranean Conference on Embedded Computing MECO’2017, Bar, Montenegro. 2017.
URL: https://mtdbest.ru/articles/Zolotarev_MECO.pdf .

13. Massey J.L. Threshold Decoding. 1963, M.I.T. Press.

14. Robinson J., Bernstein A. A class of binary recurrent codes with limited error propagation. // IEEE Transactions on Information Theory, vol. 13, no. 1, pp. 106-113, January 1967.

15. Townsend R.L., Weldon E.J. Self-orthogonal quasi-cyclic codes, // IEEE Trans. Inf. Theory IT-13, p. 183–195 (April 1967).

16. В.В. Золотарёв. Теория и алгоритмы многопорогового декодирования. // Под редакцией члена-корреспондента РАН Ю.Б. Зубарева. Москва, "Радио и связь", "Горячая линия - Телеком", 2006, 266 с.
URL: http://www.mtdbest.ru/articles/theory_and_algorithms_book2006.pdf .

17 В.В. Золотарёв. Оптимальные алгоритмы декодирования Золотарёва. Под научной редакцией члена-корреспондента РАН Ю.Б. Зубарева // М., "Горячая линия - Телеком", 2021, 268с.
URL: https://decoders-zolotarev.ru/wp-content/uploads/2021/02/optimalnye-algoritmy-dekodirovaniya-zolotareva.pdf .

18. Davey M.C., MacKay D.J.C. Low density parity check codes over GF(q). IEEE Comm. Letters, 2(6), 1998, pp.165–167.

19. Declercq D., Fossorier M. Extended minsum algorithm for decoding LDPC codes over GF(q). IEEE International Symp. on Inf. Theory, 2005, pp.464–468.

20. Zolotarev V.V., Ovechkin G.V. Efficient Multithreshold Decoding of Nonbinary Codes // ISSN 1064_2269, Journal of Communications Technology and Electronics, 2010, Vol. 55, No. 3, pp. 302–306. ©
Pleiades Publishing, Inc., 2010. Original Russian Text © V.V. Zolotarev, G.V. Ovechkin, 2010, published in Radiotekhnika I Electronika, 2010, Vol. 55, No. 3, pp. 324–329. URL: https://mtdbest.ru/articles/qMTD2010.pdf . **(in Russian).**

21. Magarshak Yu. The number raised to absolute. Nezavisimaja gazeta (Independent newspaper), 09.09.2009. URL: https://decoders-zolotarev.ru/wp-content/uploads/2021/04/chislo-vozvedennoe-v-absolyut_magarshak.pdf . . (in Russian).
https://decoders-zolotarev.ru/en/wp-content/uploads/2021/04/a-number-raised-to-absolute_magarshak.pdf . (**Eng + Rus**)

22. Kuznetsov N.A., Zolotarev V.V., Ovechkin G.V., Nazirov R.R., Satybaldina D.J., Omirbayev E.D. Review of the polar codes problems from the standpoint of noiseproof coding Optimization Theory technologies. URL:
https://decoders-zolotarev.ru/en/wp-content/uploads/2021/02/review-of-the-polar-codes-problems-from-the-standpoint-of-noiseproof-coding-optimization-theory-technologies_eng.pdf .
(**Eng**.),
https://decoders-zolotarev.ru/wp-content/uploads/2021/01/zolotaryov-antipolyary-2020.pdf .
(**Rus**.).

23. https://decoders-zolotarev.ru/en/wp-content/uploads/2020/11/mtddemo_en.zip .

24. Zolotarev V., Ovechkin G., Satybaldina D., Tashatov N., Egamberdiyev E. Divergence coding for convolutional codes. MATEC Web of Conferences 125, 05009 (2017), CSCC 2017. URL:
http://www.mtdbest.ru/articles/matecconf_cscc2017_05009.pdf . (**Eng.**)
https://decoders-zolotarev.ru/wp-content/uploads/2020/11/astana2015.pdf . **(Rus)**

25. Zolotarev V., Grinchenko N., Lotsmanov A., Ovechkin G. Developing the Principle of Divergent Coding for Gaussian Channels. 7-th Mediterranean Conference on Embedded Computing MECO'2018, Budva, Montenegro. URL:
http://www.mtdbest.ru/articles/Zolotarev_article_MECO_2018.pdf . **(Eng)**

26. Zolotarev V., Ovechkin G. Development of New Approaches to Apply Block Versions of Viterbi Algorithm. 23th International Conference on Digital Signal Processing and its Applications (DSPA), Moscow, Russia, 2021.
URL: https://decoders-zolotarev.ru/wp-content/uploads/2021/03/1.4_zolotarev.pdf . **(Rus)**

27. Zolotarev V.V., Ovechkin G.V., Zung Ch. T. The Prospects of Optimization Theory Application for Solving Shannon Problem // Conference: 2022 24th International Conference on Digital Signal Processing and its Applications (DSPA). March 2022. Moscow, Russian Federation. DOI:10.1109/DSPA53304.2022.9790742 .
https://decmtdzol.ru/articles/OT_Application.pdf .

28. Zolotarev V.V., Ovechkin G.V.

Оптимизационная Теория решила проблему Шеннона.
Старая теория кодирования завершена. Наши перспективы

В.В. Золотарёв
ИКИ РАН, Москва

Аннотация — Рассматриваются все основные результаты Оптимизационной Теории (ОТ) помехоустойчивого кодирования, полученные за 50 лет. Показано, что ОТ полностью решила проблему Шеннона для всех классических каналов и ещё 40 лет назад заменила во всех прикладных аспектах прежнюю теорию кодирования ТК. Указано, что алгоритмы ОТ обеспечивают наилучшие возможные характеристики по единому критерию качества алгоритмов коррекции ошибок ПДС≡"помехоустойчивость-достоверность-сложность". Декодеры, созданные по технологиям ОТ, обладают наилучшими даже теоретически возможными характеристиками. Самые простые практически оптимальные декодеры ОТ построены на базе методов и технологий теорий поиска глобального экстремума функционала (ПГЭФ).

Наши также запатентованные блоковые версии алгоритма Витерби (БАВ) тоже имеют минимальную на текущий момент сложность, соответствующую свёрточному АВ.

Ключевые слова — граница Шеннона, Оптимизационная Теория (ОТ), пропускная способность канала, двоичный симметричный канал (ДСК), сложность алгоритмов, поиск глобальных экстремумов функционалов (ПГЭФ), критерий "ПДС", оптимальное декодирование (ОД), теория оптимизации, блоковый алгоритм Витерби (БАВ), теория кодирования (ТК), многопороговые декодеры (МПД), параллельное каскадирование, дивергенция, декодеры с прямым контролем метрики (ДПКМ).

1. Введение.

В 1948 году К. Шеннон написал одну из своих лучших работ [1], которая положила начало развитию теории помехоустойчивого кодирования. Однако мы считаем, что после полезных результатов 1960 года в алгебраической теории и изобретении алгоритма Витерби (АВ) для свёрточных кодов в 1967 году [2] в последующие годы и вплоть до настоящего времени **не было никаких существенных прикладных достижений в теории кодирования (ТК),** которые привели бы к решению проблемы эффективного декодирования в шумящих каналах вблизи границы их пропускной способности. Наша научная школа *принципиально новой теории помехоустойчивого кодирования* опубликовала на сегодняшний день **11 монографий**, а также еще 4 книги и **2 справочника**, которые обеспечивают полное решение всех прикладных задач теории кодирования с исправлением ошибок, основанное на принципиально иных методах, а именно на технологиях и теориях поиска глобальных экстремумов функционала (ПГЭФ), которые мы назвали Оптимизационной Теорией (ОТ). **Ниже полностью представлена вся ОТ**, которая ещё в 2006г. опубликована в РФ в монографии [16], а также детально изложена затем на английском в книгах [3-5]. Мы также предлагаем для детального изучения нашу новую монографию 2021г. [17]. Все они находятся в свободном доступе [8] и как все статьи с нашими основными результатами, ***легко доступны по гиперссылкам***. При необходимости мы также будем указывать конкретные номера страниц в этих публикациях.

Все базовые алгоритмы ОТ имеют минимальную сложность N, линейно возрастающую с длиной кода n, N~n. И в то же время наши методы не отличаются по достоверности от характеристик оптимального (**с полным перебором!**) декодирования (ОД). Декодеры, созданные методами ОТ, сохраняют эти свойства также непосредственно вблизи границы Шеннона, которая, как известно, абсолютно упруга, вследствие чего она совершенно недостижима, как и скорость света для материальных тел.

И обратите внимание! Хотя мы опубликовали по ОТ практически всё и даже очень давно, мы по-прежнему лидеры, до уровня которых никто так и не дошёл! Почему? Весь мир от нас так и остался на расстоянии 15- 25 лет, а возможно, что и больше (?). Наша ОТ – совершено другая, чем прежняя неудачливая и крайне «математическая» ТК, которая, однако, ничего важного и полезного для проектирования декодеров считать так и не научилась. Поэтому мы полагаем, как и многие наиболее квалифицированные коллеги, что наша ОТ - действительно великое мировое достижение российской науки, абсолютно и безусловно достойное **Нобелевской премии.** Ну, а то, что мы её **не получим – абсолютно неважно**. Тем не менее, именно только мы создали все условия для того, чтобы наша информационная цифровая цивилизация всегда могла удобно, просто и быстро создавать, передавать, хранить и контролировать, а если надо, то и восстанавливать всю свою высокодостоверную информацию, которая, как мы очень надеемся, будет использована только на благо человечества.

И мы уверены, что наш решающий вклад в очень успешное решение всех задач достоверности при цифровом обмене никогда не будет забыт научным сообществом.

Только для краткости изложения главной идеи новой прикладной теории кодирования (ТК), как мы её называем «квантовой механики» теории информации – нашей ОТ - все картинки и графики с характеристикам алгоритмов мы здесь опускаем, т.к. эта статья носит исключительно системно-философский характер. В случае вашего первого знакомства с ОТ мы рекомендует одновременно с этой статьёй иметь поблизости наш научно-поулярный буклет [5] или его английский аналог [5а]. Он очень важен, как и множество серьёзных ссылок на строгие монографии по тематике ОТ, также помещённые в нём. Но всё же мы предлагаем больше ориентироваться именно на собственно текст этой статьи, которая помогает понять *переворот научной мысли в сфере прикладной ТК*, свершившийся **~40 лет назад**. Однако он и до сих пор полностью игнорируется почти всеми «служителями науки», которые должны были уже прямо тогда воспринять этот крайне неожиданный поворот важнейшей науки цифрового мираи довести его домногих тысяч реализаций в аппаратуре и ПО. Эта ситуация кажется ещё более странной, если указать на то, что новая ТК стала ориентировочно в 1000 раз более компактной и, безусловно, крайне простой. Более того, даже беглый просмотр всех, особенно новейших книг по ОТ показывает, что и формул-то в нашей ОТ совсем немного, тогда как все необходимые для оценок и формирования границ параметров систем кодирования математические выражения везде в нужных местах всегда есть. Это ещё в большей степени должно убедить всех исследователей и будущих создателей цифровых систем передачи и хранения данных в том, что ОТ действительно принципиально новая философия в теории информации. А все следующие из неё следствия, технологии, математические результаты и возможности удивительно простых, но невероятно эффективных алгоритмов – это только следствия формирования действительно абсолютно новой философии в прикладной теории кодирования. Так что сначала предлагаем обратиться именно к изучению этого текста, системно-философский смысл которого будет определять развитие всей современной прикладной ТК на многие последующие годы. А конкретные численные результаты для алгоритмов ОТ, как и для других, в том числе и не наших методов, всегда доступны для всех специалистов в сотнях наших публикаций, обзоров и монографий уже более 50 лет. Но они – уже конкретные следствия новой и необычной, хотя теперь уже и не очень-то юной философии.

Так, м.б., пора бы её применить и на практике? Например, в ДЗЗ, в «беспилотниках», в спутниковой связи, да и в космосе, наконец!?!

Итак, приступим!

2. Исходная ситуация. Первая революция.

Сразу отметим, что близкие по содержанию английские аналоги этой статьи опубликованы в [27] на пяти страницах и в [28[- на 4-х. Они ещё более краткие и тоже полезны. Их восприятие из-за крайней компактности будет сложнее. Но –читайте!

Как известно, прежняя теория кодирования (ТК) не способна рассчитать никакие параметры единого критерия ПДС при большом уровне шума. Это означает, что та ТК за 60 лет своего существования ничего не сделала для решения проблемы Шеннона. Отсюда следует, что ТК **вовсе не является математической задачей**. Жаль, что теоретики с этим так и не согласились! Возможно, никто из них не знаком с такими публикациями, как [5, 21], из которых следует, что аналитически представляемых результатов для крупномасштабных научных проблем почти что никогда и не существует. В науке есть жёсткая философия, настоянная на тысячелетнем уже опыте: только **у самых простых задач есть ответы в виде формул**.

Рассмотрим исходную ситуацию, с которой всё началось в ОТ. Опишем наиболее важные свойства цифровых системы и кодов. Они были **доказаны нами ~50 лет назад**. Но полное понимание теоретических и экспериментальных результатов, полученных нами за эти годы, включая новые парадигмы ОТ, почти 40 патентов, ~100 «ноу-хау» и свойства методов ПГЭФ для для реальной содержательной ТК, т. е. для нашей ОТ, может прийти к некоторым специалистам только после долгой и кропотливой работы с нашими монографиями. Однако мы ***подчеркиваем***, что наши результаты бывают весьма неожиданными, но **все они всегда чрезвычайно просты**!

Итак, мы обратили внимание на то, что для любого линейного двоичного систематического свёрточного или блокового (n,k) кода C, определяемого его проверочной матрицей H, который, например, использовался для передачи по каналу ДСК некоторого сообщения длины n, принятого декодером как $Q=(Q_k,Q_r)$, , $r=n - k$, и для произвольного кодового слова этого код $A=(A_k,A_r)$, представленных их информационными и проверочными частями, справедлива **Лемма 1**:

Для выбранного кода имеет место соотношение:

$$(A+Q)=(D,H^*(D+Q_k,Q_r)), \qquad (1)$$

где $D=A_k+Q_k$ - вектор длины k. Смысл леммы заключается в том, что покомпонентная разность (в двоичном случае это также и сумма) векторов A и Q определяется разностным вектором D длины k и результатом умножения проверочной матрицы H на вектор (A_k,Q_r). Обозначим этот результат умножения как вектор S. Тогда выражение (1) в лемме кратко записывается в виде

$$(A+Q)=(D,S). \qquad (2)$$

В ОТ это **Лемма 1** [3, 4, 16, 17]. Ясно, что если $A_k=Q_k$, то результатом такого вычисления является обычный синдром принятого вектора Q [3, 4, 13, 16]. Отсюда следует, что, изменяя D, можно найти минимальный вес суммы $|(A+Q)|$. Тогда соответствующий вектор A будет искомым решением оптимального декодера (ОД). Но это сложный способ.

Давайте далее рассмотрим более простое решение. Пусть код C также является мажоритарно декодируемым самоортогональным кодом (СОК) с кодовым расстоянием $d=2t+1$ [4,14,15]. Пусть пороговый элемент (ПЭ) в соответствующем пороговом декодере, как и в обычном декодере Дж. Месси [13], всегда суммирует $J=2t$ проверок кода, но при этом ещё добавляет в эту сумму также ту составляющую d_j вектора разности D, которая относится к очередному декодируемому символу i_j принятого сообщения. Это означает, что общее количество проверок, поступающих на входы ПЭ равно d. Пусть ПЭ изменяет символ i_j, все 2t проверок вектора синдрома и символ d_j, если эта общая сумма d проверок на его входах больше, чем d/2. Но если это произойдет для некоторого начального вектора A_1, то, очевидно, сумма всех d проверок на ПЭ станет меньше, чем d/2, и набор новых векторов (D_2,S_2) с проверками, изменившимися из-за коррекции символа i_j и символа d_j, станет разностью уже для векторов (A_2+Q). Это означает, что с изменением символа i_j был найден более правдоподобный вектор A_2, и новое состояние векторов A_2, D_2 и S_2 снова соответствует **Лемме 1**. И, следовательно, можно снова декодировать уже любве следующие символы, причём, много раз в соответствии с этим правилом, так что при всех изменениях в контролируемых символах такой многопороговый декодер (МПД) всегда будет переходить ко все более и более строго правдоподобным решениям. Эти и есть **абсолютное и полное решение проблемы Шеннона**. Значит, тем самым **совершенно завершается и вся теория кодирования (ТК) как проблема.** Далее уже – ***только технологии научной школы ОТ.*** Так что почти ничего вычислять в реальной ТК, т. е. и в нашей ОТ невозможно! Почти вообще всё остальное - задачи вычислительной математики, её очень мощного раздела поиска глобальных экстремумов. И вот с такими намерениями, опытом и целями – к нам! Это и есть наша **ОТ**. **Просим любить и жаловать!**

В ОТ это простое ключевое и сразу конечное математически сформулированное решение - Основная Теорема многопорогового декодирования (OTMTD), поскольку у МПД может быть много попыток исправления символов, т.е. итераций, вплоть до I ~ 50 ÷ 200. И тут сразу можно применять многие новые технологии.

Далее, поскольку в СОК ближайшие кодовые слова отличаются только одним информационным символом, в ДСК, как вполне ясно показал и эксперимент, для ОД достижимая нижняя оценка вероятности ошибки на бит $P_b(e)$ естественным образом определяется простейшими биномиальными распределениями для появления более чем d/2 ошибок для декодируемого символа в тех d позициях, в которых два таких кодовых слова различаются [3, с. 249; 17,с. 242]. Никакие другие алгоритмы не обладают такими полезными и понятными свойствами. При небольшой вероятности ошибки в ДСК, как много лет назад показали простейшие эксперименты, решения МПД фактически вообще не отличаются от ОД уже для I=2 [4,16]. Но пока только напомним, что целью ОТ является высоконадежное декодирование вблизи границы Шеннона, при очень высоком уровне шума, т. е. при большой вероятности ошибки в ДСК.

При переходе к двоичному **гауссовскому каналу** (АБГШ), например, при M=16 уровнях квантования входного сигнала для декодера, предельные возможности МПД улучшаются так же, как и в случае АВ, на ~2 дБ, что, конечно, весьма значимая величина. В таком МПД при декодировании ПЭ вычисляет уже взвешенные суммы проверок с небольшими целыми коэффициентами. Для этого наиболее важного на практике канала сложность N у МПД остается также линейной по отношению к длине кода **n**, а результат по достоверности получается такой же, как и для ОД [3, с. 249; 17, с. 242].

Почему проблема Шеннона теоретически полностью решена уже на этом этапе для двоичных каналов ДСК и АБГШ? Согласно критерию ПДС, сложность алгоритма МПД пропорциональна n, а именно, не превышает N=2nIRd, и все операции представляют собой лишь простейшие сложения и сравнения для небольших целых чисел. А достоверность, как отмечалось выше, даже и при значительном уровне шума соответствует уровню ОД для СОК кодов. Это стало ясно примерно в 1975 году уже из самых первых экспериментов по моделированию. Но в те годы просто в принципе ещё не было экспериментальной базы для создания действительно мощных методов декодирования, поскольку компьютеры были тогда слишком медленными, а проблема **ТК** – повторим это **– не была чисто математической задачей**. Она практически сразу стала вычислительной, оптимизационной, для которой были известны только границы для допустимых значений параметров декодеров.

Напомним еще раз, что и сейчас никто не знает, как вычислять какие-либо вероятности ошибки конкретного декодера хороших длинных кодов при высоком уровне шума. Это означает, что только моделирование всегда является единственным способом определения окончательной достоверности декодирования сложности (!) конкретного алгоритма в ТК. Так что мы, во-первых, обнаружили, что с точки зрения сложности и надежности МПД сразу же **обладает теоретически наилучшими параметрами** критерия ПДС при небольшом относительном уровне шума. Но ***как тут улучшить главный параметр - помехоустойчивость,*** т.е. расстояние рабочей зоны МПД до границы Шеннона?

3. Теория размножения ошибок. Вторая революция

Эта проблема также была решена только нашей научной школой ОТ, но только после создания полной теории размножения ошибок (РО) для мажоритарно декодируемых кодов [4, 16]. А далее за несколько лет было разработано программное обеспечение для поиска кодов с чрезвычайно низким уровнем РО. В таких кодах при одном из способов решения проблемы РО для всех возможных пар проверок, число которых имеет порядок $(nR)^2/2$, суммарное количество общих проверок во всех таких парах проверок доводится до минимально возможного числа. Именно такие коды с низкой подверженностью эффекту РО позволили теперь уже всем возможностям МПД проявляться во всём их великолепии. А к тому же, со временем и скорости компьютерного моделирования постепенно значительно выросли. Это чрезвычайно повысило результативность наших исследований, **динамично использующих возможности и тонкой теории, и масштабного эксперимента.**

Другие программные пакеты нашей школы обеспечивают сейчас демонстрацию помехоустойчивости, достоверности, сложности и настройки параметров алгоритмов МПД. Много лет назад они тоже почти сразу продемонстрировали в различных экспериментах наилучшие возможные даже теоретически характеристики МПД, в том числе вблизи границы Шеннона [3,17]. Это созданное нами ПО так и осталось единственным способом определения параметров любых декодеров школы ОТ при больших относительных уровнях шума по критерию ПДС. Других методов нет, и еще долго, а скорее всего, вообще **никогда и не будет**!

МПД в соответствии с этими совершенно объективными параметрами всегда являются наилучшими по триединому критерию ПДС, если коды выбраны в соответствии с требованиями теории РО [4, 16].

Важно, что сложность методов МПД практически всегда на несколько порядков меньше, чем у других алгоритмов [3,6,7-10]. А чтобы у всех исследователей была возможность правильно сравнивать сложность методов декодирования, мы создали программы калибровки на С++, которые доступны на наших порталах для всех желающих [8]. Это позволяет, например, на компьютере с процессором Core-i7 и тактовой частотой ~3 ГГц для кода с d~9 при I=10 выполнить оптимальное декодирование СОК на основе МПД в гауссовском канале со скоростью ~6 Мбит/с без использования каких-либо дополнительных методов, например, распараллеливания. Фактически этот пример показывает скорость работы МПД, выполняющего ~100 простейших операций сложения и сравнения целых чисел при декодировании каждого символа кода. Отсюда пересчёт производительности МПД на другое число итераций **I** и значений **d** кодового расстояния очевиден. Эти средства калибровки позволяют специалистам очень точно сравнивать скорости работы различных декодеров.

Но самым важным свойством алгоритмов ОТ стало то, что МПД всегда точно измеряет расстояние всей последовательности своих решений до принятого сообщения. Это и означает, что МПД - это алгоритм поиска глобального экстремума функционалов (ПГЭФ) в массивах со свойствами самокоррекции и с экспоненциально растущим набором потенциальных решений. И выбор кода с небольшим РО ошибок на самом деле стал единственным технологическим вкладом прежней ТК в теорию ОТ и в задачи глобальной оптимизации функционалов. А проблема достижения ОД в настоящее время решается методами разных теорий поиска глобального экстремума функционалов

(ПГЭФ), для чего было разработано множество программных пакетов, основанных на этих теориях [3, 17]. Оптимизация проводится по многим параметрам МПД: значениям порогов в ПЭ, весам проверок и т.д. А затем выполняется фактическое моделирование работы МПД, когда за несколько минут обычно определяются все параметры критерия ПДС, которые обычно оказываются самыми лучшими из возможных. Но до сих пор мы рассматривали только ДСК и гауссовский канал. Подчеркнём, что здесь характеристики МПД по критерию ПДС уже давно вне конкуренции [3, 5, 7, 8, 17].

4. Стирающие каналы.

Обратимся к каналам со стираниями (ErsC) [3,4,17]. В ОТ предложены оценки вероятности невосстановления первого символа в МПД для СОК кодов в ErsC, а также столь же простые и достижимые оценки вероятностей ошибок на символ для ОД, которые даже не нужно выводить. Суть алгоритма МПД, например, для свёрточных кодов в этом канале, который намного проще, чем даже для ДСК, заключается в том, что декодер быстро ищет ситуации, когда в проверке есть единственный стертый информационный символ, который в этом случае немедленно декодируется путём решения простейшего уравнения a+**x**=b, где **x** – искомое значение информационного символа. **И это вообще все!**

Нижняя оценка для вероятности невосстановления стёртого в канале символа просто и очень быстро достигается алгоритмом MTD даже непосредственно вблизи пропускной способности канала [3,5]. Она также очень легко выводится для СОК кодов «в одно касание» [3, 5, 17].. Алгоритм был **впервые опубликован в 1983г**.. Его сложность N тоже линейна относительно **n**, и он также позволяет принимать решения с той же достоверностью, что и ОД [3, 17]. в том числе и у границы Шеннона для этих каналов. Этим абсолютно и завершаются совершенно все исследования в ErsC – наиболее лёгком для эффективного и быстрого оптимального декодирования канале со стираниями. Эта задача – почти учебная. И крайне удивляет грандиозное число «методов» декодирования в таком канале, в то время как максимально простой, даже тривиальный способ декодирования почти сразу дал почти идеальный результат.

5. Символьные (недвоичные) коды . Третья революция

Теорема OTMTD, а также теория РО явились наиболее важными результатами ОТ и позволили школе ОТ создать МПД декодеры, которые в гауссовском и стирающем каналах, согласно критерию ПДС, обеспечивают наилучшие даже теоретически результаты даже при максимально возможном относительном уровне шума. Эти **два результата** рассматриваются некоторыми экспертами как истинно **нобелевские достижения в цифровом мире**. И в самом деле, ничего сопоставимого с алгоритмами МПД по критерию ПДС научной школе ОТ неизвестно. Лидерство ОТ и методов МПД для этих кодов совершенно беспрецедентно.

Но у научной школы ОТ есть еще и третье, не менее, а возможно, даже ещё более важное достижение такого нобелевского уровня. Мы ликвидировали к ~1985 году ***продолжающийся ещё и сейчас*** уже **60-летний кризис** в алгоритмах декодирования для недвоичных кодов. Для кодирования недвоичных данных до сих пор (кроме методов ОТ!) могут применяться только единственно доступные инженерам короткие и поэтому весьма слабые коды Рида-Соломона (РС).

А школа ОТ для случайных ошибок в q-ичных симметричных каналах (qСК) адаптировала **Лемму 1** про векторы в ДСК ещё и к таким недвоичным каналам. И согласно этой новой **Лемме 2**, для q-ичного канала и недвоичных кодов справедливо равенство

$$(A–Q)=(D,S),$$

где знак "–" соответствует обычному покомпонентному вычитанию, например, в которой группе по сложению, например, по модулю q [3, 4, 13, 16, 17]. И на основе этой новой леммы для недвоичных мажоритарно декодируемых кодов, которые мы назвали **символьными кодами**, был создан чрезвычайно простой алгоритм qМПД. Этот алгоритм также **строго сходится к решению ОД** и **имеет линейную сложность N относительно n:** N ~n [3, 4, 5, 16]. Столь полное и «**мгновенно возникшее**» даже теоретически наилучшее возможное решение для декодирования символьных кодов, которому нет равных среди других [18, 19], сразу решило все проблемы для недвоичных кодов после более, чем полувекового застоя.

Нижние простые достижимые оценки для символьного ОД представлены в [3,4,16, 17]. Моделирование показало, что действительно оптимальное декодирование (ОД) при очень высоком относительном уровне шума канала qСК реализуется вполне просто, причём при вероятностях ошибки канала qСК кратно более высоких, чем те, при которых хоть как-то ещё работоспособны коды РС, которые. повторим, слабые т. к. обычно они короткие.

Символьные МПД на много порядков быстрее, эффективнее и проще, чем все другие методы [8-11,20]. Этим и можно, наконец, завершить изложение вообще всех основ новой полной ОТ, основанной на теориях ПГЭФ, теореме ОТМПД и на теории РО, объединённых в единую теорию ОТ уникальными ресурсами нашего инновационного ПО.

С порталов [8] можно скачать информативный цветной мультфильм с очень простой инструкцией для пользователя https://decoders-zolotarev.ru по гиперссылке [23]. Он демонстрирует достижение МПД декодером решения ОД даже для ещё не очень длинного кода в ДСК с довольно высоким уровнем шума. С каждой коррекцией символа, как показана работа МПД в мультике, декодер в соответствии с OTMTD строго улучшает свои решения, делая их всё более правдоподобными и тем самым приближаясь к решению ОД, а затем достигая его.

Напомним снова, что qМПД для символьных кодов создан более 30 лет назад, но и сейчас, после полной публикации этого алгоритма и при наличии в свободном доступе программ моделирования работы qМПД, его уже 60 лет после изобретения кодов РС до сиз пор никто не смог даже просто повторить, что крайне странно для такой столь важной для технологий и приложений области прикладной ТК. Возможно, что отчасти это связано с крайним пренебрежением почти всех «спецов», полагающих, что они занимаются теорией кодирования, экспериментальными моментами следований и, что тоже вполне реально, сильным падением уровня программирования в современном мире, который миновал точку максимума в уровне своего интеллекта, будем надеяться, всё-таки максимума локального.

6. Роль теорий оптимизации в ОТ

Понимание ОТ как задачи оптимизации позволило нам создать множество новых парадигм, которые еще больше улучшают сходимость решений всех типов МПД к ОД. Это дивергенция, которая увеличивает расстояние между кодами с помощью методов, не связанных с каскадированием [3,17,24,25], декодеры с прямым контролем метрики (ДПКМ) [17], а также параллельное каскадирование [3,17] и т.д.

Наши новые решения для блоковых алгоритмов Витерби также значительно упростили декодирование коротких блочных кодов [12, 17, 26]. Наш запатентованный блоковый АВ имеет ту же экспоненту сложности, что и свёрточный VA, в то время как для ряда других блоковых опубликованных ОД сложность соответствует **удвоенной экспоненте** [5, 17] **(!)**. Именно здесь важно напомнить и давно известнее мнение, что роль теорий оптимизации в математике столь же велика, как и роль самой математики в науке.

7. О методах декодирования при большом уровне шума

В ближайшем будущем при высоком относительном уровне шума, скорее всего, не будет получено никаких аналитических теоретических результатов для конкретных методов коррекции ошибок. Это – крайне трудно, что и было ***доказано всем 60-летним опытом относительной активности предыдущей ТК, давно, 40 лет назад тихо ушедшей с полей науки***. Кстати, и проблема полярных кодов [22], которую мы подробно и неоднократно рассматривали в своих разных обзорах, стала полной и крайне шумной катастрофой предыдущего формата теории, показав ее тщетность, неэффективность и абсолютную бездоказательность во всех аспектах, по меньшей мере, в неуклюжих выступлениях наших российских «фокусников» про «поляры». Полная неспособность и наших «спецов» по кодам заниматься программированием и моделирование также усугубила огромные проблемы этого абсолютно тупикового направления идей в ТК.

Таким образом, реальные дальнейшие результаты по приближению к границе Шеннона пока что возможны только в плане технологической оптимизации и настроек. Главную роль здесь уже успешно сыграли такие важные парадигмы ОТ, как принцип дивергенции, который реализует методы несвязанного с каскадированием увеличения кодового расстояния, технологии настройки элементов декодера, методы параллельного каскадирования, а также принцип декодирования с прямым контролем метрики (ДПКМ) и некоторые другие технологии, рассмотренные в [3, 4]. Все они позволили дополнительно приблизить область эффективной работы МПД на границе Шеннона, сохранив линейную сложность и достигнув надежности ОД для используемых кодов.

Мы подчеркиваем, что эти столь важные результаты были получены в процессе единой **разработки тонкой логичной теории и масштабной экспериментальной инновационной деятельности**, основанной на аппаратном и программном проектировании и моделировании работы алгоритмов MTD, а также на расширении области оптимизации параметров декодера средствами дополнительно созданного специального ПО, ориентированного на поиск экстремумов функционалов в пространстве цифровых массивов со свойствами самокоррекции возможных ошибок. И при этом, как мы понимаем, все эти вопросы **еще даже и не были сформулированы в качестве текущих задач** прикладной теории информации **ни одной научной группой в мире**.

8. О сравнении алгоритмов

Все методы МПД выполняют только операции с малыми целыми числами, а также имеют наилучшие параметры критерия ПДС в совокупности и по отдельности. Ясно, что из этого непосредственно следует, что аппаратные и программные версии таких декодеров обладают самой высокой производительностью, в том числе на ПЛИС, которые для двоичных кодов мы уже обсуждали. Символические МПД также обладают отличной производительностью. За час такой декодер на процессоре Core-i7 может собрать **статистику объемом ~10^{10} битов**, а иногда и несколько больше. [3, 9, 17]. На данный момент **никаких методов**, сопоставимых с нашими алгоритмами по критерию ПДС и для недвоичных кодов **также не существует**.

Наши обзоры по вопросам прикладной ТК, т. е. нашей ОТ, можно найти в [8, 22]. Однако они вызывают несогласие с нами у некоторых индивидуумов, которые не следят за результатами и технологиями научной школы ОТ. Напомним, что наша работа получила премию Правительства РФ в области науки и техники. Сетевые порталы нашей школы ОТ посещают иногда до 100 тысяч читателей в год [5, 17]. Мы также награждены

Золотой медалью ЕС "*За исключительные достижения*" в науке. И нам вручена **Золотая медаль** Международного салона изобретений за супербыстрый МПД декодер на **ПЛИС ALTERA**, созданный в ИКИ РАН согласно патенту школы ОТ и заработавший ещё в 2007 г. на скорости более 1 Гбит/с.

9. Заключение.

Школа ОТ завершила создание наилучших алгоритмов по критерию ПДС во всех классических каналах, рассматриваемых в прикладной ТК. Существенно улучшить наши результаты по критерию ПДС чрезвычайно трудно. Задача, поставленная Шенноном, полностью **успешно решена теоретически ещё до 1985г**., а все разнообразные экспериментальные испытания методов и технологий ОТ, нашей новой «квантовой механики» в теории информации, завершились полным успехом и увенчались безусловным триумфом ещё **до 1995 года**. С тех пор вплоть до настоящего времени расширяются исследования ОТ, направленные на дальнейшее развитие технологий ОТ, упрощение проектирования МПД декодеров и новых модификаций алгоритмов Витерби, снижение задержек принятия решений и дальнейший рост скорости наших декодеров.

Ультрасложная работа несомненно **нобелевского уровня** успешно и полностью выполнена для всех традиционных в ТК типов каналов связи.

Предложения по дальнейшему развитию технологий ОТ были высказаны нами в работах [3,5,17]. Разумеется, они будут непрерывно расширяться и углубляться. Мы предлагаем всем нашу безусловную поддержку в освоении прикладных достижений ОТ.

Литература

1. Shannon C.E. A Mathematical Theory of Communication. Bell System Technical Journal, 1948, Vol.27, P.379–423, P.623–656.

2. Viterbi A.J. Error bounds for convolutional codes and asymptotically optimum decoding algorithm. IEEE Trans. Inform. Theory, IT-13, N.2, 1967, P.260–269.

3.. В.В. Золотарёв. Теория кодирования как задача поиска глобального эксстремума. Под научной редакцией академика РАН Н.А. Кузнецова // М., "Горячая линия - Телеком", 2018, 220 с.
URL: https://decoders-zolotarev.ru/wp-content/uploads/2021/10/kniga-2018-pro-globalnyj-poisk.pdf . .

3а. (Английской аналог) - Zolotarev V. Coding Theory as a Simple Optimal Decoding near Shannon's Bound (Optimization Theory of error-correcting coding is a new “quantum mechanics” of information theory) // Moscow, Hot-Line Telecom, 2018, 333 p. URL: https://mtdbest.ru/articles/mtd_book_2019.pdf. **(Eng)**

4. Zolotarev V., Zubarev Y., Ovechkin G. Optimization Coding Theory and Multithreshold Algorithms. Geneva, ITU, 2015, 159 p.,
URL: https://mtdbest.ru/articles/Zolotarev_ITU.pdf. **(Eng)**

5.. *Кузнецов Н.А., Золотарёв В.В., Зубарев Ю.Б., Овечкин Г.В., Назиров Р.Р., Аверин С.В.* Проблемы и открытия Оптимизационной Теории

помехоустойчивого кодирования (ОТ в иллюстрациях) // М.: Горячая линия - Телеком, 2020, 36 с.
URL: http://www.mtdbest.ru/articles/comics.pdf. (Рус)

5a. (английский вариант) - Kuznetsov N.A., Zolotarev V.V., Zubarev Yu.B., Ovechkin G.V., Nazirov R,R, Averin S.V. Problems and Discoveries of the Optimization Theory for Coding near Shannon's Bound (OT in illustrations). Moscow: SRI RAS, RSREU, 2020, 45 p. **(Eng)**
URL: https://mtdbest.ru/articles/e-comics.pdf.

6. Zolotarev V.V., Ovechkin G.V., Chulkov I.V., Ovechkin P.V., Averin S.V., Satybaldina D.Zh., Kao V.T. Review of Achievements in the Optimization Coding Theory for Satellite Channels and Earth Remote Sensing Systems: 25 Years of Evolution. // "Current problems in remote sensing of the earth from space", 2017, Vol.14, No.1, P.9–24.
URL:https://mtdbest.ru/articles/ERSS_2017.pdf. **(Eng)**

7. Zolotarev V.V., Ovechkin G.V. On the Prospects of Optimization Theory // 22th International Conference on Digital Signal Processing and its Applications (DSPA), Moscow, Russia, 2020.
URL: https://mtdbest.ru/articles/Zolotarev_90_Final.pdf. **(Eng)**

8. Web-sites: www.mtdbest.ru , www.decmtdzol.ru , https://decoders-zolotarev.ru.

9. Кузнецов Н.А., Золотарёв В.В., Овечкин Г.В., Овечкин П.В. Недвоичные многопороговые декодеры и другие методы коррекции ошибок в символьной информации // Радиотехника, №6, вып. 141, 2010, с. 4–9.
URL: https://mtdbest.ru/articles/Zolotarev_radiotechnik_2010.pdf . (in Russian).

10. Zolotarev V., Ovechkin G., Seitkulov Y., Satybaldina D., Mishin V. Algorithm of Multithreshold Decoding for Non-Binary Self-Orthogonal Concatenated Codes // 8-th International Conference on application of information and communication technologies. 15-17 October, Astana, Kazakhstan. 2014. URL:
https://decoders-zolotarev.ru/en/wp-content/uploads/2020/11/algorithm_of_qmtd.pdf .

11. Averin S.V., Zolotarev V.V. Non-Binary Multithreshold Decoders with Almost Optimum Performance. Proceeding of 9-th ISCTA'07 16-20 July 2007, UK,
URL: https://decoders-zolotarev.ru/en/wp-content/uploads/2020/11/qmtd_iscta07.pdf .

12. Zolotarev V.V., Ovechkin G.V., Ovechkin P.V. Modified Viterbi Algorithm for Block Code Decoding. 6th Mediterranean Conference on Embedded Computing MECO'2017, Bar, Montenegro. 2017.
URL: https://mtdbest.ru/articles/Zolotarev_MECO.pdf .

13. Massey J.L. Threshold Decoding. 1963, M.I.T. Press.

14. Robinson J., Bernstein A. A class of binary recurrent codes with limited error propagation. // IEEE Transactions on Information Theory, vol. 13, no. 1, pp. 106-113, January 1967.

15. Townsend R.L., Weldon E.J. Self-orthogonal quasi-cyclic codes, // IEEE Trans. Inf. Theory IT-13, p. 183–195 (April 1967).

16. В.В. Золотарёв. Теория и алгоритмы многопорогового декодирования. // Под редакцией члена-корреспондента РАН Ю.Б. Зубарева. Москва, "Радио и связь", "Горячая линия - Телеком", 2006, 266 с.
URL: http://www.mtdbest.ru/articles/theory_and_algorithms_book2006.pdf .

17 В.В. Золотарёв. Оптимальные алгоритмы декодирования Золотарёва. Под научной редакцией члена-корреспондента РАН Ю.Б. Зубарева // М., "Горячая линия - Телеком", 2021, 268с.
URL: https://decoders-zolotarev.ru/wp-content/uploads/2021/02/optimalnye-algoritmy-dekodirovaniya-zolotareva.pdf .

18. Davey M.C., MacKay D.J.C. Low density parity check codes over GF(q). IEEE Comm. Letters, 2(6), 1998, pp.165–167.

19. Declercq D., Fossorier M. Extended minsum algorithm for decoding LDPC codes over GF(q). IEEE International Symp. on Inf. Theory, 2005, pp.464–468.

20. Zolotarev V.V., Ovechkin G.V. Efficient Multithreshold Decoding of Nonbinary Codes // ISSN 1064_2269, Journal of Communications Technology and Electronics, 2010, Vol. 55, No. 3, pp. 302–306. ©
Pleiades Publishing, Inc., 2010. Original Russian Text © V.V. Zolotarev, G.V. Ovechkin, 2010, published in Radiotekhnika I Electronika, 2010, Vol. 55, No. 3, pp. 324–329. URL: https://mtdbest.ru/articles/qMTD2010.pdf . (in Russian).

21. Magarshak Yu. The number raised to absolute. Nezavisimaja gazeta (Independent newspaper), 09.09.2009. URL: https://decoders-zolotarev.ru/wp-content/uploads/2021/04/chislo-vozvedennoe-v-absolyut_magarshak.pdf . . (in Russian).
https://decoders-zolotarev.ru/en/wp-content/uploads/2021/04/a-number-raised-to-absolute_magarshak.pdf . (**Eng + Rus**)

22. Kuznetsov N.A., Zolotarev V.V., Ovechkin G.V., Nazirov R.R., Satybaldina D.J., Omirbayev E.D. Review of the polar codes problems from the standpoint of noiseproof coding Optimization Theory technologies. URL:
https://decoders-zolotarev.ru/en/wp-content/uploads/2021/02/review-of-the-polar-codes-problems-from-the-standpoint-of-noiseproof-coding-optimization-theory-technologies_eng.pdf . (**Eng**.),
https://decoders-zolotarev.ru/wp-content/uploads/2021/01/zolotaryov-antipolyary-2020.pdf . (**Rus**.).

23. https://decoders-zolotarev.ru/en/wp-content/uploads/2020/11/mtddemo_en.zip .

24. Zolotarev V., Ovechkin G., Satybaldina D., Tashatov N., Egamberdiyev E. Divergence coding for convolutional codes. MATEC Web of Conferences 125, 05009 (2017), CSCC 2017. URL:
http://www.mtdbest.ru/articles/matecconf_cscc2017_05009.pdf . (**Eng.**)
https://decoders-zolotarev.ru/wp-content/uploads/2020/11/astana2015.pdf . **(Rus)**

25. Zolotarev V., Grinchenko N., Lotsmanov A., Ovechkin G. Developing the Principle of Divergent Coding for Gaussian Channels. 7-th Mediterranean Conference on Embedded Computing MECO'2018, Budva, Montenegro. URL:
http://www.mtdbest.ru/articles/Zolotarev_article_MECO_2018.pdf . **(Eng)**

26. Zolotarev V., Ovechkin G. Development of New Approaches to Apply Block Versions of Viterbi Algorithm. 23th International Conference on Digital Signal Processing and its Applications (DSPA), Moscow, Russia, 2021.
URL: https://decoders-zolotarev.ru/wp-content/uploads/2021/03/1.4_zolotarev.pdf . **(Rus)**

27. Zolotarev V.V., Ovechkin G.V., Zung Ch. T. The Prospects of Optimization Theory Application for Solving Shannon Problem // Conference: 2022 24th International Conference on Digital Signal Processing and its Applications (DSPA). March 2022. Moscow, Russian Federation. DOI:10.1109/DSPA53304.2022.9790742 .
https://decmtdzol.ru/articles/OT_Application.pdf .